Elliptische Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten in Gebieten mit unbeschränktem Rand

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Volker Vogelsang
aus ~~Bad Gandersheim~~
Reichstadt/Sudetenland

Göttingen 1974

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534919_0015

Elliptische Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten in Gebieten mit unbeschränktem Rand

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Volker Vogelsang
aus ~~Bad Gandersheim~~
Reichsadels Sudetenland

Göttingen 1974

D 7

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referent: Prof.Dr. E. Heinz
Korreferent: Prof.Dr. M. Deuring

Tag der mündlichen Prüfung:

31. Oktober 1974

Diese Arbeit entstand auf Anregung
der Herren Prof.Dr. Heinz,
Prof.Dr. Jäger und Dr. Böhme an
der Universität Göttingen.

Inhaltsverzeichnis

		Seite
§0	Einleitung	1
§1	Bezeichnungen und Hilfssätze	8
§2	Das Spektrum von A	24
§3	Die Charakteristikenfunktion	36
§4	Die Kommutatorgleichung	46
§5	A-priori-Abschätzungen für die Strahlungslösungen I	55
§6	A-priori-Abschätzungen für die Strahlungslösungen II	71
§7	Ein Existenzsatz in gewichteten Sobolevräumen mit negativer Norm	81
§8	Existenz und Eindeutigkeit von Strahlungslösungen	93
	Literatur	105

§0 Einleitung

1. In dieser Arbeit behandeln wir das Dirichlet-Randwertproblem der elliptischen Differentialgleichung

$$Au - ku := \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqq m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(x) D^{\beta}u) + \tag{0.1}$$

$$+ \sum_{|\alpha| \leqq 2m-1} r_{\alpha}(x) D^{\alpha}u - ku = f, \quad f \in L^2(\Omega)$$

$\varphi u \in \overset{\circ}{H}{}^{m}(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$ für alle $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ mit variablen, genügend oft differenzierbaren, beschränkten Koeffizienten, der Elliptizitätsbedingung

$$\sum_{|\alpha| = |\beta| = m} \xi^{\alpha} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\beta} \geqq e_0 |\xi|^{2m} \quad (e_0 > 0),$$

einem bis auf asymptotisch, mindestens von der Ordnung $O(|x|^{-1})$, verschwindende Koeffizienten $\{r_{\alpha}\}$ symmetrischen Operator A und einer im Spektrum von A gelegenen positiven Zahl k in einem Gebiet Ω mit unbeschränktem Rand $\dot{\Omega}$.
Die Funktion u ist klassische Lösung bei hinreichender Regularität der geg. Daten (Ladyzh.[9]).
Entscheidend ist die Frage, unter welchen Voraussetzungen an das Verhalten des Randes, der Koeffizienten und der Funktion u im Unendlichen das Problem (0.1) eindeutig lösbar ist.
Wir betrachten Gebiete Ω , die gleichmäßig von der Klasse C^{2m} sind (Def. 2) und auf $\dot{\Omega}$ der Bedingung

$$x \cdot \nu(x) \leqq \mu \quad (\nu(x) \text{ äußere Normale}), \ (|x| \longrightarrow \infty) \tag{0.2}$$

für hinr. kleine positive Zahlen μ genügen.
Wir beweisen Eindeutigkeits- und Existenzsätze für sog. Strahlungslösungen der Gl. (0.1) und leiten die für den Beweis notwendigen A-priori-Abschätzungen her.

2. In einer grundlegenden Arbeit gelang Vainberg [18] die Lösung des Problems (0.1) im $\mathbb{R}^n$ für den Fall konstanter Koeffizienten $\{a^*_{\alpha\beta}\}$ durch die Konstruktion einer Green'schen Funktion. Dabei stellt der Autor an das Polynom

$$P^*(\xi) = \sum_{\substack{|\alpha|,|\beta| \leqq m \\ 1 \leqq |\alpha|+|\beta|}} (\overline{i\xi})^\alpha a^*_{\alpha\beta} (i\xi)^\beta$$

die Forderung:

Die reelle Nullstellenfläche $N(P^*) := \{\eta \in \mathbb{R}^n : P^*(\eta) - k = 0\}$ (0.3) ist eine (n-1) dim. differenzierbare Mannigfaltigkeit, grad $P^*(\eta) \neq 0$ für alle $\eta \in N(P^*)$ und die Gauß'sche Krümmung auf $N(P^*)$ ist stets positiv. —— Mit dem durch

$\nu(\sigma) = \hat{x}, \sigma' \hat{x} > 0$ $(\hat{x} \in S_1^{n-1}$, $\nu(\sigma')$ Normale an $\sigma' \in N(P^*))$ (0.4)

eindeutig definierten, differenzierbaren Vektorfeld $\sigma' = \sigma'(\hat{x})$ (falls $N(P^*)$ zushgd. ist) zeigt Vainberg mit der Green'schen Funktion E und ihrem asymptotischen Verhalten für $|x| \longrightarrow \infty$

$$E(x) = e^{i(\sigma'(\hat{x}) \cdot x)} |x|^{-\frac{n-1}{2}} (\omega(\hat{x}) + O(|x|^{-\frac{1}{2}})) \quad (\hat{x} = \frac{x}{|x|})$$

die Existenz und Eindeutigkeit des Problems

$$P^*(\tfrac{1}{i} \operatorname{grad})\, u - ku = f \quad , \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{0.5}$$
$$u(x) = O(|x|^{\frac{1-n}{2}})$$
$$[(\tfrac{1}{i} \operatorname{grad})^\alpha - \sigma'^\alpha]\, u(x) = O(|x|^{-\frac{n}{2}}) \quad (|\alpha| \leqq 2m).$$

Der gleiche Autor [19] diskutiert das (0.5) bzw. (0.1) entsprechende Problem

$$Au - ku := P^*(\tfrac{1}{i} \operatorname{grad})\, u + \lambda R(x) u - ku = f \tag{0.6}$$

auch für variable Koeffizienten mit kompaktem Träger (R(x)) unter der zusätzlichen Bedingung, daß es kein Teilerpolynom von P^*_{-k} ohne reelle Nullstellen gibt und λ außerhalb einer diskreten Menge liegt.

Eine Verallgemeinerung auf variable Koeffizienten ohne kompakten Träger erzielte Jäger [7], [8] für das symmetrische Problem

$$(A - k^2)u := - D_{x_i}' (a_{ij} D_{x_j}) + pu - k^2 u = f \tag{0.7}$$

$$D_S u - iku \in L^2(\Omega) \qquad (D_S := \hat{x}_i \, a_{ij} \, D_{x_j})$$

in Außengebieten unter den Bedingungen

$$\begin{aligned} a_{ij}(x) - \delta_{ij} &= O(|x|^{-\frac{3}{2}-\varepsilon}) \quad (\varepsilon > o) \\ D_{x_k} a_{ij}(x), p(x) &= O(|x|^{-\frac{3}{2}-\varepsilon}). \end{aligned} \tag{0.8}$$

Jäger löst (0.7) ohne die Green'sche Funktion, indem er A-priori-Abschätzungen vom Typ

$$\|D_S u - iku\|_{o,\Omega} \leqq c \, (\|(1+r)\,(A-(k+i\lambda)^2)u\|_{o,\Omega} + \|(1+r)^{\frac{-1-\varepsilon}{2}} u\|_{o,\Omega})$$

angibt und die Methode der Grenzabsorption ($\lambda \to o, \lambda > o$) benutzt. Dabei stellt der Autor den Operator A ((0.7)) durch Polarkoordinaten $(r,\cdot)$ dar und verwendet für die vektorwertige Abbildung $v : r \longrightarrow u(r,\cdot)$ eindimensionale, vektorwertige Abschätzungsmethoden.
Insbesondere zeigt J. auch durch eine Rellich'sche Abschätzung [13] der Lösung der Gl. $(A - k^2)u = o$ nach unten, daß in (o,∞) keine Punkteigenwerte auftreten.
In diesem Zusammenhang ist auch die Arbeit von Saito [15], [16] zu erwähnen, der das Verhalten des Potentials $p(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ unter der Ausstrahlungsbedingung

$(1+r)^{\frac{-1+\varepsilon}{2}} (D_r u - iku) \in L^2(\Omega)$ abschwächt.

Für Gebiete mit unbeschränktem Rand ist ein Resultat von Eidus [4] von Interesse, der für das Gebiet

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > \varphi(x')\} \quad (x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}))$$

mit einer Funktion $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, die

$$o < c_1 < \varphi(x') < c_2 \ , \ |\operatorname{grad} \varphi(x')| = O(|x'|^{-1})$$

erfüllt, ohne Green'sche Funktion aus der A-priori-Abschätzung

$$\|x_n^{-(\frac{3+\varepsilon}{2})} u\|_{1,\Omega} \leqq c \ \|x_n^{\frac{3+\varepsilon}{2}} (\Delta u + (k+i\lambda)^2 u)\|_{o,\Omega} \quad (\varepsilon > o)$$

die Existenz einer Lösung des Dirichlet-Probl. $(\Delta + k^2)u = f$ folgert, die dem Prinzip der Grenzabsorption genügt. Die Charakterisierung einer Ausstrahlungs-Bedingung fehlt aber.

3. Für unsere Problemstellung versagt einerseits die Methode der Green'schen Funktion (Vainberg) wegen des unbeschränkten Randes und andererseits der Separationsansatz (Jäger) auf Grund der allgemeinen Gestalt von (0.1).
(i) Unser erstes Ziel ist die Untersuchung des Spektrums von A mit dem Definitionsbereich $\overset{\circ}{H}{}^m_q(\Omega) \cap H^{2m}_q(\Omega)$, wobei wir (allgemeiner) gewichtete Sobolevräume mit $q(x) = (1+|x|^2)^{-\frac{\delta}{2}}$, $o \leqq \delta \leqq \frac{1}{2}$, zulassen (§1.1).
Wir zeigen (Satz 1(i)), daß im Intervall (k_o, ∞) für ein hinreichend großes k_o keine Punkteigenwerte liegen und fordern dabei die Beschränktheit der Funktionen

$$r\, D_r\, a_{\alpha\beta} \text{ auf } \Omega \quad (|\alpha|, |\beta| \leqq m)$$

und für den Hauptteil mit einem gen. kleinen pos. ε

$$\sup_{\Omega} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} |r\, D_r\, a_{\alpha\beta}(x)| \leqq \varepsilon$$

sowie (0.2) auf ganz $\dot{\Omega}$.
Unter stärkeren Wachstumsbedingungen der Koeffizienten auf Ω und einer verschärften Elliptizitätsbedingung

$$|\xi|\, D|_{\xi=1} \Big(\sum_{1 \leqq |\alpha|,|\beta| \leqq m} (i\xi)^{\alpha}\, a_{\alpha\beta}(x)\, (i\xi)^{\beta} \Big) \geqq e_1 \ (|\xi|^2 + |\xi|^{2m})$$

($e_1 > o$) beweisen wir (Satz 1 (ii)), daß es im ganzen Intervall (o, ∞) keine Punkteigenwerte gibt.

Die Information über das Spektrum von A folgt aus der A-priori-Abschätzung

$$\|u\|_{m,q,\Omega} \leqq c \; \|(1+r)\,(A-k)u\|_{o,q,\Omega} \quad , \tag{0.9}$$

die wir ausgehend von den Termen

$$((A-k)u,\; r\,D_r u)_{o,q,\Omega} \; , \; ((A-k)u,u)_{o,q,\Omega}$$

für hinr. kleine δ herleiten.
Hiermit vergleichen lassen sich Resultate von Wienholtz [20] und Rhode [14], die die Lösung der homogenen, elliptischen, symm. Dgl. 2. Ordnung positiv nach unten abschätzen und so Aussagen über das Spektrum erhalten. Bei Wienholtz tritt für Außengebiete die (0.2) entsprechende stärkere Forderung

$$x \cdot \nu(x) \leqq o \quad \text{für alle } x \in \dot{\Omega}$$

auf.
Mit Hilfe der Charakterisierung der gewichteten Sobolevräume mit negativer Norm liefert (0.9) auch die Existenz einer Lösung $(1+r^2)^{\frac{\delta-1}{2}}\, u \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ mit $\varphi u \in H^{2m}(\Omega)$ für alle $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ der Gl. (0.1) (Satz 5).
(ii) Der Schwerpunkt unserer Arbeit liegt aber in der Untersuchung der Strahlungslösungen, die, falls die Vainberg-Bedingungen (0.3) für zushgd. $N(P^*)$ erfüllt sind, durch

$$(1+r^2)^{-\frac{1}{4}}\, u \in \overset{\circ}{H}{}^m_q(\Omega) \cap H^{2m}_q(\Omega) \quad (\delta > o)$$

$$D^\alpha(e^{-is}\, u) \in L^2_q(\Omega^1) \quad (1 \leqq |\alpha| \leqq m)$$

mit $s(x) := \sigma(\hat{x}) \cdot x$, $\Omega^1 = \{x \in \Omega : |x| > 1\}$ erklärt sind (Def. 6) und die eind. Lösbarkeit von (0.1) garantieren.
Dabei lauten die Wachstumsbedingungen an die Koeffizienten $\{a_{\alpha\beta}(x)\}$ für $|x| \longrightarrow \infty$

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta}(x) - a^*_{\alpha\beta} &= O(|x|^{-1}) \\ D_{x_i} a_{\alpha\beta}(x) &= \varepsilon\, O(|x|^{-1}) \quad (i = 1,\ldots,n) \end{aligned} \tag{0.10}$$

und entsprechendes Verhalten der höheren Ableitungen.

Heuristisch gehen wir von der Annahme aus, daß sich die Lösung u wie die Green'sche Funktion E des "benachbarten" Probl. (0.5) verhält und spalten den Oszillationsterm e^{is} ab. Die Forderung, $N(P^*)$ ist zushgd., läßt sich (vermutlich) vermeiden.
Zusätzlich verlangen wir, daß $\{D_{\eta_i \eta_j} P^*(\eta)\}_{ij=1}^n$ positiv definit ist für alle $\eta \in N(P^*)$ und die verschärfte Elliptizitätsbedingung

$$|\xi| D_{|\xi|} \Phi(\eta, \xi) > \Phi(\eta, \xi) > o \qquad (0.11)$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n - \{o\}$, $\eta \in N(P^*)$ gilt, wobei

$$\Phi(\eta, \xi) := P^*(\eta + \xi) - \operatorname{grad} P^*(\eta) \cdot \xi - P^*(\eta).$$

Die Eigenschaft (0.11) ist sicher für Polynome $P^*(\xi)$ erfüllt, deren Funktionalmatrix der 2. Ableitungen semipositiv definit auf $\mathbb{R}^n_\xi$ ist (s. auch die Diskussion §3).
An den Rand $\dot{\Omega}$ stellen wir die Forderung

$$x \cdot \nu(x) \leqq \text{const.} \; |x|^{-1} \quad (x \in \dot{\Omega}, \; |x| \longrightarrow \infty)$$

oder unter einer verschärften Gleichmäßigkeit von $\overline{\Omega}$ (Def. 3) die schwächere Bedingung (0.2).
Den Eindeutigkeitsbeweis für Strahlungslösungen (Satz 6) führen wir dann unter der Voraussetzung, daß k kein Punkteigenwert des symmetrischen Operators A ist durch den Nachweis der A-priori-Abschätzung

$$\|u\|_{o,q,\Omega} \leqq c \left(\sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|D^\alpha (e^{-is} u)\|_{o,q,\Omega^1} + \|(1+r^2)^{-\frac{1}{4}} u\|_{2m,q,\Omega} \right)$$

für die Lösung der homogenen Gleichung $(A-k)u = o$.
Die für die Methode der Grenzabsorption ($\lambda \longrightarrow o, \lambda > o$) und damit für die Existenzaussagen (Satz 7) notwendigen A-priori-Abschätzungen (Satz 3,4)

$$\sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|D^\alpha (e^{-is} u)\|_{o,q,\Omega^1} + \|(1+r^2)^{-\frac{1}{4}} u\|_{o,q,\Omega} \leqq$$

$$\leqq c \left(\|(1+r)(A-k-i\lambda)u\|_{o,q,\Omega} + \|u\|_{m,\Omega_{R_1}} \right)$$

(c, R_1 unabh. von $\{u, \lambda\}$) leiten wir in den Paragraphen 5 und 6 her.

Dazu transformieren wir (0.1) auf eine Form (Satz 2)

$$B(e^{-is}u) = e^{-is}f\,, \tag{0.12}$$

die den Störterm $Q(1)u$ nicht mehr enthält, und wenden im Prinzip die bei der Untersuchung des Spektrums von A aufgeführten Verfahren konsequent auf die Gl. (0.12) an. Eine Schwierigkeit besteht darin, daß das Auftreten des Terms $O(1)u$ zu vermeiden ist.

4. Unsere Ergebnisse gelten natürlich auch für den $\mathbb{R}^n$ oder Außengebiete und schließen die Resultate von Vainberg bis auf die Bedingung (0.11) und die von Jäger ($m = 1$) bis auf die Aussagen über das Spektrum von A, der keine Forderungen an das Wachstum der Funktionen $r D_r a_{ij}$ auf ganz Ω und an den beschränkten Rand $\dot{\Omega}$ stellt. Die dimensionsunabh. Voraussetzungen (0.10) sind schwächer als (0.8) bei Jäger und gelten darüber hinaus für einen elliptischen Differentialoperator (0.1) bel. Ordnung und unbeschränkten Rand $\dot{\Omega}$. Außerdem ist unsere Ausstrahlungsbedingung stärker als die Bedg. (0.7) mit $s = kr$ (bis auf das Gewicht q).
Es sei noch bemerkt, daß die Untersuchung des Spektrums und der zugeh. Existenz-Satz 5 keine asymptotisch konstanten Koeffizienten erfordert.
Vermutlich lassen sich die hier angegebenen A-priori-Abschätzungen auf den Problemkreis der Entwicklung nach Eigenfunktionen mit den von Jäger [8] für $m = 1$ erzielten abstrakten Hilbertraummethoden ohne dimensionsabhängige Voraussetzungen anwenden.

§1 Bezeichnungen und Hilfssätze

1. Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\dot{\Omega}$ der Rand von Ω.
Sei stets

$$\Omega_R = \{x \in \Omega : |x| < R\}, \dot{\Omega}_R = \{x \in \dot{\Omega} : |x| < R\}$$

$$\Omega_{R_1,R_2} = \{x \in \Omega : R_1 < |x| < R_2\}$$

$$S_R = \{x \in \Omega : |x| = R\}$$

$$K_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$$

$$\Sigma_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R,\ x_n \geqq o\}$$

$$\partial\Sigma_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R,\ x_n = o\}$$

$$r = |x|, \quad \hat{x} = \frac{x}{|x|}$$

und $\nu = \nu(x)$ die äußere Normale an $\dot{\Omega}$ im Punkt $x \in \dot{\Omega}$.
Die Differentiation bezeichnen wir für $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ mit $\alpha_i \geqq o$, ganz, durch

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

und $D = \text{grad}$, $D_r = \frac{\partial}{\partial r}$, $D_{x_i} = D^{e^i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ sowie
$D_\nu^k = (\nu D)^k$ auf $\dot{\Omega}$.
Das Skalarprodukt und die Norm in $L^2(\Omega)$ sei

$$(u,v)_{o,\Omega} = \int_\Omega \overline{u}(x)\ v(x)\,dx$$

$$\|u\|_{o,\Omega} = (u,u)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Räume $C^k(\Omega)$, $C_o^k(\Omega)$, $C^k(\overline{\Omega})$, $k \geqq o$, ganz, seien wie üblich definiert.
Wir erklären für $u \in C^k(\Omega)$ die Normen

$$\|u\|_{C^k(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leqq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|$$

$$\|u\|_{k,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leqq k} \|D^\alpha u\|_{o,\Omega}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Sei

$$C_*^k(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C^k(\overline{\Omega}) : \|u\|_{C^k(\Omega)} < +\infty \right\} .$$

Die Sobolevschen Funktionenräume $H^k(\Omega)$, $\overset{\circ}{H}{}^k(\Omega)$ erhält man in üblicher Weise durch Abschließung von
$\left\{ u \in C_*^k(\overline{\Omega}) : \|u\|_{k,\Omega} < \infty \right\}$ bzw. $C_o^k(\Omega)$ in der
$\| \ \|_{k,\Omega}$ -Norm und $H_{loc}^k(\Omega)$ sei wie üblich definiert.
Wir definieren noch

$$H_*^k(\Omega) = \left\{ u \in H_{loc}^k(\Omega) : \text{für jede Funktion } \varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ ist } \varphi u \in H^k(\Omega) \right\}$$

und entsprechend

$$\overset{\circ}{H}{}_*^k(\Omega) = \left\{ u \in H_{loc}^k(\Omega) : \text{für jede Funktion } \varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ ist } \varphi u \in \overset{\circ}{H}{}^k(\Omega) \right\}.$$

Weiter verwenden wir gewichtete Normen und gewichtete Sobolevräume.
Sei $q = q(x)$ eine auf $\overline{\Omega}$ stetige, positive Funktion. Sei

$$\|u\|_{k,q,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leqq k} \| q D^\alpha u \|_{o,\Omega}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

und $H_q^k(\Omega)$, $\overset{\circ}{H}{}_q^k(\Omega)$ die entsprechenden Abschließungen von
$\left\{ u \in C_*^k(\overline{\Omega}) : \|u\|_{k,q,\Omega} < \infty \right\}$ bzw. $C_o^k(\Omega)$ in der
$\| \ \|_{k,q,\Omega}$ -Norm.

2. Wir präzisieren nun die Forderungen an die Glattheit des Randes der Gebiete, die wir in den folgenden Abschnitten betrachten.

Definition 1.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Dann heißt $\overline{\Omega}$ von der Klasse C^k, $k \geq 1$, wenn zu jedem $x \in \dot{\Omega}$ eine offene Umgebung $U(x)$ und ein C^k-Diffeomorphismus

$$T : \overline{\Sigma}_1 \longrightarrow \overline{U} \cap \overline{\Omega}$$

$$T : \partial\overline{\Sigma}_1 \longrightarrow \overline{U} \cap \dot{\Omega} \quad , \quad T(o) = x$$

existieren.
Für Gebiete mit unbeschränktem Rand brauchen wir die schärfere (in praktischer Formulierung)

Definition 2.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Dann heißt $\overline{\Omega}$ gleichmäßig von der Klasse C^k, $k \geq 1$, wenn (relativ) offene Überdeckungen

$$\{Q'_i\}_{i=1}^{\infty} \quad \text{und} \quad \{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$$

von $\overline{\Omega}$ existieren mit $Q'_i \subset Q_i$ $(i = 1, \ldots \infty)$, und für jedes $x \in \overline{\Omega}$ ist die Anzahl der i mit $x \in Q_i$ gleichmäßig in x beschränkt durch n_o.
Zu jedem i existiert ein C^k-Diffeomorphismus T_i mit , falls $Q_i \cap \dot{\Omega}$ nicht leer ist,

$$T_i : \Sigma_1 \longrightarrow Q_i$$

$$T_i : \Sigma_{\frac{1}{2}} \longrightarrow Q'_i$$

$$T_i : \partial\Sigma_1 \longrightarrow Q_i \cap \dot{\Omega}$$

bzw., falls $Q_i \cap \dot{\Omega}$ leer ist,

$$T_i : K_1 \longrightarrow Q_i$$
$$T_i \quad K_1 \longrightarrow Q_i'$$
$$\overline{2}$$

und die C^k-Normen (der Komponenten von T_i, T_i^{-1})

$$\|T_i\|_{C^k(G_1)}, \quad \|T_i^{-1}\|_{C^k(Q_i)} \qquad (G_1 = \Sigma_1 \text{ bzw. } G_1 = K_1)$$

sind gleichmäßig in i beschränkt.

Wir bemerken:
Jedes $\bar{\Omega}$ von der Klasse C^k mit beschränktem Rand ist gleichmäßig von der Klasse C^k.

Wesentlich an der Definition 2 ist die Möglichkeit der Konstruktuion einer "gleichmäßigen" Zerlegung der Eins auf $\bar{\Omega}$:

Lemma 1.1.

Sei $\bar{\Omega}$ gleichmäßig von der Klasse C^k. Dann existiert eine gleichmäßige Zerlegung der Eins $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ auf $\bar{\Omega}$ bezüglich der Überdeckung $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$, d.h. es gilt

$$\varphi_i \in C^k(\bar{\Omega}), \quad \varphi_i \geqq 0, \quad \sum_i \varphi_i^2 \equiv 1 \text{ auf } \bar{\Omega}$$

mit

$$\mathrm{Tr}(\varphi_i \circ T_i \mid \Sigma_1) \subset \Sigma_{\frac{3}{4}} \text{ bzw. } \mathrm{Tr}(\varphi_i \circ T_i \mid K_1) \subset K_{\frac{3}{4}}$$

und die C^k-Normen

$$\|\varphi_i\|_{C^k(\Omega)}$$

sind gleichmäßig in i beschränkt.

Beweis:

Sei $\psi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Glättungsfunktion mit

$$\psi(y) = \begin{cases} 1 & y \in K_{\frac{1}{2}} \\ o & y \notin K_{\frac{3}{4}} \end{cases} , \quad o \leqq \psi(y) \leqq 1 \quad \text{stets} .$$

Wir definieren dann für $x \in \bar{\Omega}$, i bel.,

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \psi(T_i^{-1} x) & x \in Q_i \\ o & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw. kurz

$$\psi_i \circ T_i = \psi \quad \text{auf } K_1 \text{ oder } \Sigma_1 ,$$

und weiter sei

$$\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2(x) \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

erklärt.
Es gilt nach Voraussetzung und Konstruktion für alle $x \in \bar{\Omega}$

$$1 \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2(x) = \sum_{\nu=1}^{n_o} \psi_{i_\nu}^2(x) \leqq n_o$$

für geeignete Indizes $i_1, \ldots, i_{n_o}$, n_o unabh. von x .
Damit sind die C^k-Normen

$$\| \varphi_i \|_{C^k(\Omega)}$$

gleichmäßig in i beschränkt sowie die restliche Beh. erfüllt.

3. Wir stellen noch einige allgemeine Eigenschaften elliptischer Differentialgleichungen zusammen, die insbesondere für Gebiete mit unbeschränktem Rand von Interesse sind. Die Beweise für Gebiete mit beschränktem Rand sind bei (Agmon [1], Lions-Magenes [11]) zu finden und lassen sich relativ leicht mit einer gleichmäßigen Zerlegung der Eins (Lemma 1.1) auf Gebiete mit unbeschr. Rand übertragen.
Zuvor zeigen wir einige Aussagen über die Einschränkung $u|_{\dot\Omega}$ von Funktionen $u \in H^k_*(\Omega)$ auf den Rand $\dot\Omega$. Falls $\bar\Omega$ von der Klasse C^1 ist, so läßt sich (bekanntlich) mit einer lokalendlichen Überdeckung $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ und zugehörigen Zerlegung der Eins $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ von $\dot\Omega$ der Raum

$$L^2(\dot\Omega)$$

und die zugehörige Norm

$$\|u\|_{o,\dot\Omega} = \Big\{\sum_i \int_{U_i} \varphi_i^2 \,|\, u \,|^2 \, do_i\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

definieren.

Lemma 1.2.

Sei $\bar\Omega$ gleichmäßig von der Klasse C^{k+1}.
Dann besitzt die Abbildung ("Einbettung")

$$E : u \in C^1_*(\bar\Omega) \longrightarrow \{u|_{\dot\Omega} \in L^2_{loc}(\dot\Omega)\}$$

eine stetige Fortsetzung

$$\bar E : H^1_*(\Omega) \longrightarrow L^2_{loc}(\dot\Omega)$$

bzw.

$$\bar E : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\dot\Omega),$$

und somit ist für alle $u \in H^{k+1}_*(\Omega)$, $\varphi \in C^\infty_o(\mathbb{R}^n)$

$$\sum_{|\alpha| \leqq k} \|D^\alpha(\varphi u)\|_{o,\dot\Omega} \leqq c \, \|\varphi u\|_{k+1,\Omega}$$

bzw. für alle $u \in H^{k+1}(\Omega)$

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|_{0,\dot{\Omega}} \leq c \, \|u\|_{k+1,\Omega}$$

mit einer von $\{\varphi, u\}$ unabh. Konstanten c.

Außerdem gilt für

$$u \in \mathring{H}^k_*(\Omega) \cap H^{k+1}_*(\Omega)$$

die Beziehung auf $\dot{\Omega}$

$$D^\alpha u = \begin{cases} 0 & , \ |\alpha| \leq k-1 \\ \nu^\alpha D^k_y u, & |\alpha| = k \end{cases} .$$

Beweis:

(Lions-Magenes [11], Ch. 1).

Wir verwenden die Schreibweise $u|_{\dot{\Omega}}$ statt $\overline{E} u|_{\dot{\Omega}}$.
Es gelte die

Voraussetzung 1.1.

Sei $\overline{\Omega}$ gleichmäßig von der Klasse C^{2m}.
Sei

$$A = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

mit $a_\alpha \in L^\infty(\Omega)$; $a_\alpha \in C^{|\alpha|-m}_*(\overline{\Omega})$ $(|\alpha| > m)$
und der Elliptizitätsbedingung

$$\mathrm{Re}(-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \geq e_o |\xi|^{2m}$$

für alle $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit einer pos. Konst. e_o.
Für ein $\delta \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}$ seien die Gewichte

$$q(x) = (1 + |x|^2)^{-\frac{\delta}{2}} = O(|x|^{-\delta})$$

$$p(x) = q(x)\,(1 + |x|^2)^{-\frac{1}{4}} = O(|x|^{-\delta-\frac{1}{2}})$$

$$\varrho(x) = q(x)\,(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}} = O(|x|^{1-\delta}) \quad (|x| \longrightarrow \infty)$$

definiert.
Sei noch die BLF b für $u,v \in C_o^\infty(\Omega)$ durch die Identität

$$b[u,v] = \sum_{|\alpha|,\,|\beta| \leqq m} (a_{\alpha\beta} D^\alpha u,\ D^\beta v)_{o,\Omega} = (Au,v)_{o,\Omega} \quad (1.1)$$

mit geeigneten Koeffizienten

$$a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega);\ a_{\alpha\beta} \in C_*^{|\beta|}(\overline{\Omega}) \quad (|\beta| > o)$$

definiert.
Wir erhalten dann

Lemma 1.3. (Garding'sche Ungleichung)

Sei die Vor. 1.1 erfüllt.
Dann ist mit von u unabh., pos. Konstanten C, k_1

$$C\|u\|_{m,\Omega}^2 \leqq \mathrm{Re}\, b[u,u] + k_1 \|u\|_{o,\Omega}^2$$

für alle $u \in \mathring{H}^m(\Omega)$.

Beweis:

(Agmon [1], Theorem 7.6)

und

Lemma 1.4. (Interpolationssatz)

Sei $\overline{\Omega}$ gleichmäßig von der Klasse C^m.
Sei $o < k < m$ und $\varepsilon > o$. Dann existiert ein $c(\varepsilon)$, so daß für alle $u \in H^m(\Omega)$ gilt

$$\|u\|_{k,\Omega} \leqq \varepsilon \|u\|_{m,\Omega} + c(\varepsilon)\, \|u\|_{o,\Omega}\,.$$

Beweis:

Wir benutzen die gleichmäßige Überdeckung $\{\Omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ gemäß Definition 2. Sei $G_1 = K_1$ oder $G_1 = \Sigma_1$. Nach (Agmon [1], Theorem 3.3) existiert ein $c(\varepsilon)$ mit

$$\|u\|^2_{k,G_1} \leqq \varepsilon \|u\|^2_{m,G_1} + c(\varepsilon) \|u\|^2_{o,G_1}$$

für alle $u \in H^m(G_1)$.
Es folgt dann mit einer von $\{u,\varepsilon\}$ unabh. Konst. c

$$\|u\|^2_{k,\Omega} \leqq \sum_i \|u\|^2_{k,\Omega_i} \leqq c \sum_i \|u(T_i\cdot)\|^2_{k,G_1}$$

$$\leqq c \sum_i \{\varepsilon \|u(T_i\cdot)\|^2_{m,G_1} + c(\varepsilon) \|u(T_i\cdot)\|^2_{o,G_1}\}$$

$$\leqq c \sum_i \{\varepsilon \|u\|^2_{m,\Omega_i} + c(\varepsilon) \|u\|^2_{o,\Omega_i}\}$$

$$\leqq c\, n_o \{\varepsilon \|u\|^2_{m,\Omega} + c(\varepsilon) \|u\|^2_{o,\Omega}\}$$

und somit die Beh..
Weiter zeigen wir

Lemma 1.5.

Sei die Vor. 1.1 erfüllt und $u \in \overset{\circ}{H}{}^m_*(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ mit

$$b[u,\varphi] = (f,\varphi)_{o,\Omega} \quad \text{für alle } \varphi \in C_o^\infty(\Omega) .$$

Dann ist

$$u \in H^{2m}_*(\Omega) , \quad Au = f$$

und es gibt ein N_1 und eine von $\{u,N\}$ unabh. Konstante C mit

$$\|u\|_{2m,\Omega_N} \leqq C \left(\|Au\|_{o,\Omega_{N+N_1}} + \|u\|_{m,\Omega_{N+N_1}}\right) \tag{1.2}$$

für alle $N \geqq o$.
Falls $u \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ gilt, so ist $u \in H^{2m}(\Omega)$ und

$$\|u\|_{2m,\Omega} \leqq C \left(\|Au\|_{o,\Omega} + \|u\|_{o,\Omega} \right)$$

mit einer von u unabh. Konstanten C.

Beweis:

Wir benutzen wieder die gleichmäßige Überdeckung $\{Q_i\}_{i=1}$ von $\overline{\Omega}$ gemäß Def. 2. Lokal gilt nach (Agmon [1], Lemma 9.5, Theorem 9.6, Theorem 9.8)

$$u \in H^{2m}(Q_i')$$

und

$$\|u\|^2_{2m,Q_i'} \leqq c \left(\|f\|^2_{o,Q_i} + \|u\|^2_{m,Q_i} \right) \tag{1.3}$$

mit einer (bez. i) nur von

$$\sup_i \left\{ \|T_i\|_{C^{2m}(G_1)} + \|T_i^{-1}\|_{C^{2m}(Q_i)} \right\}$$

und

$$T_i^{-1}(Q_i) \setminus T_i^{-1}(Q_i') = G_1 \setminus G_{\frac{1}{2}}$$

abhängigen und somit von i unabh. Konstanten c.
Mit $N_1 = \sup_{\substack{x,y \in Q_i \\ i=1,\ldots\infty}} |x-y| < \infty$ erhalten wir aus (1.3) die erste Behauptung.
Summieren wir (1.3) über alle i, so folgt

$$\|u\|^2_{2m,\Omega} \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \|u\|^2_{2m,Q_i'}$$

$$\leqq c \left(\sum_i \|f\|^2_{o,Q_i} + \sum_i \|u\|^2_{m,Q_i} \right)$$

$$\leqq c\, n_o \left(\|f\|^2_{o,\Omega} + \|u\|^2_{m,\Omega} \right) < \infty \quad .$$

Dann liefert die Garding'sche Ungleichung (Lemma 1.3) oder ein Interpolationssatz (Lemma 1.4) die zweite Beh. (1.2).

Für gewichtete Sobolevräume beweisen wir

Lemma 1.6.

Sei die Vor. 1.1 erfüllt.
Sei

$$u \in \mathring{H}^m_p(\Omega) \cap H^{2m}_p(\Omega) \cap L^2_q(\Omega)$$

und

$$Au \in L^2_q(\Omega) .$$

Dann gilt $u \in H^{2m}_q(\Omega)$ und

$$\|u\|_{2m,q,\Omega} \leqq c \left(\|Au\|_{o,q,\Omega} + \|u\|_{o,q,\Omega} \right)$$

mit einer von u unabh. Konstanten c.

Beweis:

Wir definieren eine geeignete Glättungsfunktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ mit

$$\varphi(r) = \begin{cases} 1 , & r \leqq 1 \\ o , & r \geqq 2 \end{cases} , \quad o \leqq \varphi(r) \leqq 1 \text{ stets} ,$$

und für $N \geqq 1$

$$\varphi_N(r) = \varphi\left(\tfrac{1}{N} r \right) .$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt für $1 \leqq |\alpha| \leqq 2m$

$$D^\alpha (q(x)\varphi_N(|x|) = O(|x|^{-\frac{1}{2}}) p(x) = O(1) p(x) \quad (|x| \to \infty)$$

gleichmäßig in N und

$$q D^\alpha u = \sum_{\beta \leqq \alpha} O(1) D^\beta (qu) . \tag{1.4}$$

Es folgt dann die Darstellung

$$A(q \varphi_N u) = q \varphi_N Au + p R_{2m-1} u \tag{1.5}$$

mit einem Differentialoperator R_{2m-1} von der Ordnung 2m-1 mit auf $\overline{\Omega}$ gleichmäßig in N beschränkten Koeffizienten.

Wenden wir nun (1.4), Lemma 1.5 ((1.2)) und (1.5) auf die Funktion

$$q\,\varphi_N u \;\in\; \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$$

an, so erhalten wir mit einer von $\{u,N\}$ unabh., allgemeinen Konstanten c die Ungleichung

$$\|u\|_{2m,q,\Omega_N} \leqq c\,\|qu\|_{2m,\Omega_N} \leqq$$

$$\leqq c\,(\|A(q\,\varphi_N u)\|_{o,\Omega} + \|q\,\varphi_N u\|_{o,\Omega})$$

$$\leqq c\,(\|Au\|_{o,q,\Omega} + \|u\|_{2m-1,p,\Omega} + \|u\|_{o,q,\Omega}) < \infty$$

Der Grenzübergang $N \longrightarrow \infty$ ergibt

$$u \in H_q^{2m}(\Omega)$$

und wegen $p \leqq q$, (1.4) außerdem

$$\|u\|_{2m,q,\Omega} \leqq c\,\|qu\|_{2m,\Omega} \leqq$$

$$\leqq c\,(\|Au\|_{o,q,\Omega} + \|qu\|_{2m-1,\Omega} + \|u\|_{o,q,\Omega}).$$

Deshalb folgt mit dem Interpolationslemma 1.4 für die Funktion qu schließlich die behauptete Abschätzung.

4. Zur Verschärfung unserer Ergebnisse stellen wir auch Forderungen an die "Größe" der gleichmäßigen Überdeckung von $\overline{\Omega}$.

Definition 3.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.
Dann heißt $\overline{\Omega}$ r-gleichmäßig von der Klasse C^k, $k \geqq 1$, wenn $\overline{\Omega}$ gleichmäßig von der Klasse C^k ist und zusätzlich gilt:

Es gibt ein $N_o \geqq 1$ und eine streng monoton wachsende Folge $\{r_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ mit $r_i \geqq N_o$ und zugehörige "Streifen"

$$G_i := \{x \in \overline{\Omega} : c_1 r_i < |x| < c_2 r_i\}$$
$$G'_i := \{x \in \overline{\Omega} : c'_1 r_i < |x| < c'_2 r_i\}$$

mit von i unabh. Konstanten

$$0 < c_1 < c'_1 < 1 < c'_2 < c_2 ,$$

sowie offene Überdeckungen $\{S_j\}_{j=1}^{m_1}$ und $\{S'_j\}_{j=1}^{m_1}$ von S_1^{n-1} mit $\overline{S}'_j \subset S_j$ und zugehörige "Kegel"

$$K_j := \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \hat{x} \in S_j\}$$
$$K'_j := \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \hat{x} \in S'_j\}$$

mit:

a) Die Familien $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ und $\{G'_i\}_{i=1}^{\infty}$ überdecken $\overline{\Omega'}$, $\Omega' := \{x \in \Omega : |x| > N_o\}$ und für jedes $x \in \overline{\Omega}$ ist die Anzahl der i mit $x \in G_i$ gleichmäßig beschränkt.

b) Falls $(G_i \cap K_j) \cap \dot{\Omega}$ nicht leer ist, existieren eine offene Umgebung U_{ij} von $G_i \cap K_j$, eine Teilmenge $\Sigma_{ij} \subset \{y \in \mathbb{R}^n : y_n \geqq 0\}$ und ein C^k-Diffeomorphismus T_{ij} mit

$$T_{ij} : \Sigma_{ij} \longrightarrow U_{ij} \cap \overline{\Omega}$$
$$T_{ij} : \partial\Sigma_{ij} \longrightarrow U_{ij} \cap \dot{\Omega}$$

und die C^k-Normen

$$\|T_{ij}\|_{C^k(\Sigma_{ij})} , \quad \|T_{ij}\|_{C^k(U_{ij} \cap \overline{\Omega})}$$

sind gleichmäßig in i,j beschränkt.

Seien im folgenden die Konstanten c''_1, c''_2 mit

$$c_1 < c''_1 < c'_1 < 1 < c'_2 < c''_2 < c_2$$

und die offenen Teilmengen S''_j von S_1^{n-1} mit

$$\overline{S}'_j \subset S''_j \subset \overline{S}''_j \subset S_j$$

fest gewählt und G''_i, K''_j entsprechend definiert.

Die wesentliche Eigenschaft der Def. 3 liefert das

Lemma 1.7.

Sei $\overline{\Omega}$ r-gleichmäßig von der Klasse C^k.
Dann existiert eine r-gleichmäßige Zerlegung der Eins $\{\varphi_{ij}\}$ auf $\overline{\Omega'}$ bezüglich der Überdeckung $\{G_i \cap K_j\}$ $(i = 1,\ldots\infty\ ;$ $j = 1,\ldots,m_1)$, d.h. es gilt

$$\varphi_{ij} \in C^\infty(\overline{\Omega'}) \ , \quad \varphi_{ij} \geqq 0, \quad \sum_{i,j} \varphi_{ij}^2 \equiv 1 \text{ auf } \overline{\Omega'}$$

$$\mathrm{Tr}(\varphi_{ij}) \subset G''_i \cap K''_j$$

und für $|\alpha| \geqq 1$ gleichmäßig in i,j

$$D^\alpha \varphi_{ij}(x) = O(|x|^{-1}) \quad (|x| \longrightarrow \infty) \ . \tag{1.6}$$

Beweis: (vgl. Lemma 1.1)

Sei $\zeta_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ eine Glättungsfunktion mit

$$\zeta_0(r) = \begin{cases} 1 & r \in (c'_1, c'_2) \\ 0 & r \notin (c''_1, c''_2) \end{cases} \ , \quad 0 \leqq \zeta_0(r) \leqq 1 \text{ stets} .$$

Wir definieren

$$\zeta_i(x) := \zeta_0\left(\frac{|x|}{r_i}\right) ,$$

und es gilt insbesondere $\mathrm{Tr}(\zeta_i)_{\overline{\Omega'}} \subset G''_i$ mit

$$D^\alpha \zeta_i(x) = O\left(\frac{1}{r_i}\right) = O(|x|^{-1})$$

für $|\alpha| \geqq 1$, $|x| \geqq N_0$ gleichmäßig in i.

Sei weiter

$$\varphi_i^*(x) := \frac{\varphi_i(x)}{\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad .$$

Die Familie $\{\varphi_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ bildet dann eine Zerlegung der Eins bezgl. der Überdeckung $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$. Sei noch $\{\eta_j\}_{j=1}^{m_1}$ eine Zerlegung der Eins auf S_1^{n-1} mit

$$\eta_j \in C_o^{\infty}(S_j),\ \mathrm{Tr}(\eta_j) \subset S_j'' ,\ \sum_{j=1}^{m_1} \eta_j^2 \equiv 1 \text{ auf } S_1^{n-1} .$$

Setzen wir schließlich

$$\varphi_{ij}(x) = \varphi_i^*(x)\ \eta_j(\hat{x}) ,$$

so folgt alles Gewünschte.

5. Wir zeigen noch eine Eigenschaft der Multiindizes.

Lemma 1.8.

Seien $\{d_\gamma\}$ beliebige Koeffizienten.
Dann gilt die Zerlegung

$$\sum_{|\gamma|=k_1+k_2} \frac{|\gamma|!}{\gamma!}\, d_\gamma = \sum_{\substack{|\alpha|=k_1 \\ |\beta|=k_2}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}\,\frac{|\beta|!}{\beta!}\, d_{\alpha+\beta} \quad .$$

Beweis:

Wir betrachten die Gleichung

$$\sum_{\substack{|\varepsilon_i|=1 \\ (i=1,\ldots,k)}} d_{\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_k} = \sum_{|\gamma|=k} d_\gamma \left(\sum_{\substack{\gamma=\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_k \\ |\varepsilon_i|=1}} 1\right)$$

$$= \sum_{|\gamma|=k} d_\gamma\ \omega(\gamma)$$

mit einer von γ abhängigen Konstanten $\omega(\gamma)$, die wir

durch die spezielle Wahl

$$d_\gamma = x^\gamma \quad , \quad x = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$$

bestimmen. Es gilt:

$$\Big(\sum_{|\varepsilon|=1} x^\varepsilon \Big)^k = \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{\gamma!} x^\gamma \quad ,$$

wie aus der Entwicklung

$$f(x) = \sum_{\gamma \geqq 0} \frac{1}{\gamma!} D^\gamma f(0) x^\gamma$$

für

$$f(x) = \Big(\sum_{|\varepsilon|=1} x^\varepsilon \Big)^k \quad \text{mit} \quad D^\gamma f(0) = \begin{cases} k! & , \ |\gamma| = k \\ 0 & , \ |\gamma| \neq k \end{cases}$$

folgt.

Also erhalten wir über

$$\sum_{|\varepsilon_i|=1} x^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k} = \Big(\sum_{|\varepsilon|=1} x^\varepsilon \Big)^k$$

das Resultat $\omega(\gamma) = \dfrac{|\gamma|!}{\gamma!}$.

Mit der Darstellung

$$\sum_{|\varepsilon_i|=1} d_{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_1+1} + \dots + \varepsilon_{k_1+k_2}} = \sum_{|\gamma|=k_1+k_2} d_\gamma \frac{(k_1+k_2)!}{\gamma!}$$

bzw.

$$\sum_{|\varepsilon_i|=1} d_{(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{k_1}) + (\varepsilon_{k_1+1} + \dots + \varepsilon_{k_1+k_2})} = \sum_{\substack{|\alpha|=k_1 \\ |\beta|=k_2}} d_{\alpha+\beta} \frac{k_1!}{\alpha!} \frac{k_2!}{\beta!}$$

folgt jetzt die Beh..

§2 Das Spektrum von A

Wir untersuchen das Spektrum eines elliptischen, bis auf kleine Störungen R symmetrischen Differentialoperators

$$A = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqq m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(a_{\alpha\beta} D^{\beta}) + R$$

mit Definitionsbereich $\overset{\circ}{H}{}^{m}_{q}(\Omega) \cap H^{2m}_{q}(\Omega) \subset L^{2}_{q}(\Omega)$ und einem geeigneten Gewicht q, wobei wir insbesondere Gebiete mit unbeschränktem Rand und speziell $q \equiv 1$ zulassen.
Wir geben hinreichende Bedingungen dafür an, daß im Intervall (k_o, ∞), k_o genügend groß, und unter stärkeren Voraussetzungen im Intervall (o, ∞) keine Punkteigenwerte liegen.
Es gelte die

Voraussetzung (VI).

(1) Sei $\overline{\Omega}$ gleichmäßig von der Klasse C^{2m} und

$$q(x) = (1+|x|^2)^{-\frac{\delta}{2}}, \quad \varrho(x) = (1+|x|^2)^{\frac{1-\delta}{2}}, \quad o \leqq \delta \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Sei

$$A = L + R \quad , \quad k \in \mathbb{R}, \; k > o \, ,$$

mit

$$L = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqq m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} (a_{\alpha\beta}(x) D^{\beta}) \, , \quad a_{\alpha\beta} = \overline{a_{\beta\alpha}} \, ,$$

der Elliptizitätsbedingung

$$P_{2m}(x,\xi) := \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \xi^{\alpha} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\beta} \geqq e_o |\xi|^{2m}$$

für alle $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit einer positiven Konstanten e_o und

$$R = \sum_{|\alpha| \leqq 2m-1} r_{\alpha}(x) D^{\alpha}$$

mit Koeffizienten $\{a_{\alpha\beta}\}$, $\{r_{\alpha}\}$, die den folgenden Regularitätsbedingungen und Abschätzungen auf Ω mit

einer positiven Zahl ε , $o < \varepsilon \leqq 1$, genügen.

a) $a_{\alpha\beta} \in C^1_*(\overline{\Omega})$

$a_{\alpha\beta} \in C^{|\alpha|}_*(\overline{\Omega})$ $\quad (|\alpha| > o)$

$|r D_r a_{\alpha\beta}(x)| \leqq \varepsilon$ $\quad (x \in \Omega)$, $(|\alpha| = |\beta| = m)$

und die Funktionen $r D_r a_{\alpha\beta}$ $(|\alpha| + |\beta| \leqq 2m-1)$ sind auf Ω beschränkt.

b) $r_\alpha \in L^\infty(\Omega)$

$r_\alpha \in C^{|\alpha|-m}_*(\overline{\Omega})$ $\quad (|\alpha| > m)$

$|r r_\alpha(x)| \leqq \varepsilon$ $\quad$ (f.a. $x \in \Omega$) $\quad (|\alpha| = 2m-1)$

und die Funktionen $r r_\alpha$ $(|\alpha| \leqq 2m-2)$, $r D^y r_\alpha$ $(|\alpha| > m, |y| \leqq |\alpha| - m)$ sind auf Ω beschränkt.

(2)a) Zu $\varepsilon > o$ gibt es eine Folge $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, so daß mit

$$U_i = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_i| < \frac{2}{\varepsilon}\right\} \qquad U_i' = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_i| < \frac{1}{\varepsilon}\right\}$$

die Familien $\{U_i'\}_{i=1}^{\infty}$, $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ den $\mathbb{R}^n$ überdecken und für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Anzahl der i mit $x \in U_i$ gleichmäßig in x durch n_1, n_1 unabhängig von ε , beschränkt ist und

$$\sup_{\substack{x, x' \in U_i \cap \Omega \\ i=1,\ldots,\infty}} |a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(x')| \leqq \varepsilon \quad .$$

b) Weiter gilt $|r D_r a_{\alpha\beta}(x)| \leqq \varepsilon$ $\quad (x \in \Omega)$

$|a_{\alpha\beta}(x)| \leqq \varepsilon$ $\quad (x \in \Omega)$, $(|\alpha| \cdot |\beta| = o)$

$|r r_\alpha(x)| \leqq \varepsilon$ $\quad$ (f.a. $x \in \Omega$)

$|r D^y r_\alpha(x)| \leqq \varepsilon (x \in \Omega)$ $\quad (|\alpha| > m, \ |y| \leqq |\alpha| - m)$

c) und die verschärfte Elliptizitätsbedingung

$$|\xi| D_{|\xi|} P(x, \xi) \geqq e_1 (|\xi|^2 + |\xi|^{2m})$$

für alle $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit einer positiven Konstanten e_1,

wobei

$$P(x,\xi) := \sum_{1 \leqq |\alpha|,\ |\beta| \leqq m} \xi^{\alpha}\, a_{\alpha\beta}(x)\, i^{|\beta|-|\alpha|}\, \xi^{\beta} \quad .$$

(3) Für alle $x \in \dot{\Omega}$ gilt mit einer Zahl μ , $0 \leqq \mu \leqq 1$,

$$x \cdot \nu(x) \geqq \mu \, .$$

Bemerkung 1.

(i) Die Parameter δ, ε, μ werden im folgenden noch genügend klein gewählt (Satz 1).

(ii) a) Die Bedingung (2)a) ist sicher dann erfüllt, wenn

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} |\, D_j\, a_{\alpha\beta}(x)\,| \leqq \varepsilon^2 \quad (j = 1,\ldots,n)$$

ist, wie sofort aus der Ungleichung

$$|a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(x')\,| \leqq \sup_{\substack{\overline{\Omega} \\ (j=1,\ldots,n)}} |\, D_j\, a_{\alpha\beta}\,|\ |x-x'|$$

folgt,

b) oder wenn es konstanten Koeffizienten $\{a^*_{\alpha\beta}\}$ mit

$$|a_{\alpha\beta}(x) - a^*_{\alpha\beta}\,| \leqq \varepsilon \qquad (x \in \Omega)$$

gibt.

(iii) Bez. (2)c) genügt auch $|\xi|\, D_{|\xi|}\, P(x,\xi) \geqq e_1\, (|\xi|^{2\ell} + |\xi|^{2m})$, falls $|a_{\alpha\beta}(x)\,| \leqq \varepsilon$ $(x \in \Omega)$, $(|\alpha| < \ell$ od. $|\beta| < \ell)$.

(iv) Die Bedingung $x \cdot \nu(x) \geqq \mu$ auf $\dot{\Omega}$ läßt sich bei "Glockengebieten" oft durch "Verschieben" des Gebietes erreichen. Der Differentialoperator A ist invariant bei einer solchen Translation.

(v) Falls $x \cdot \nu(x) \geqq 0$ auf $\dot{\Omega}$ für alle hinreichend großen $|x|$ ist, genügt die Voraussetzung $\overline{\Omega}$ von der Klasse C^{2m}.

Für die folgenden Untersuchungen seien c, c_i $(i = 1, \ldots, 4)$ von $\{u, k, R, \delta, \varepsilon, \mu\}$ unabh. Konstanten (wenn nichts anderes ausgesagt wird) und $J_R(u)$ ein allgemeines Restglied mit

$$|J_R(u)| \leqq c \left\{ (\delta + \varepsilon) \, \|u\|^2_{m,q,\Omega_R} + R \sum_{|\alpha| \leqq 2m} \|D^\alpha u\|^2_{o,q,S_R} + \right.$$

$$\left. + k R \, \|u\|^2_{o,q,S_R} \right\} + c_1 \|u\|_{m-1,q,\Omega_R} \|u\|_{m,q,\Omega_R},$$

wobei

$$\|u\|^2_{o,q,S_R} = \int_{S_R} q^2 |u|^2 do, \quad c_1 = \delta + \varepsilon, \text{ falls } (\forall I)(2)b) \text{ gilt.}$$

Nach Lemma 1.2 ist die 2m-fache part. Integration auf dem beschränkten Gebiet Ω_R, $\bar{\Omega}$ von der Klasse C^{2m}, für Funktionen $u \in \mathring{H}^m_*(\Omega) \cap H^{2m}_*(\Omega)$ erlaubt und für die Randwerte gilt

$$D^\alpha u = \begin{cases} o & |\alpha| < m \\ \nu^\alpha D^m_\nu u & |\alpha| = m \end{cases} \quad \text{auf } \dot{\Omega}. \tag{2.1}$$

Wir verwenden die Schreibweise

$$(u,v)_R := (u,v)_{o,q,\Omega_R}, \quad \|u\|_R := \|u\|_{o,q,\Omega_R}$$

(bei festem Gewicht q) und die Summationskonvention.

Wir zeigen das vorbereitende

Lemma 2.1.

Sei $(\forall I)(1)$ erfüllt. Dann ist

$$\operatorname{Re} (Lu, r D_r u)_{o,q,\Omega_R} =$$

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leqq m} \operatorname{Re} (a_{\alpha\beta} D^\beta u, (|\alpha| - \tfrac{n}{2}) D^\alpha u)_{o,q,\Omega_R}$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqq m} \operatorname{Re} ((r D_r a_{\alpha\beta}) D^\beta u, D^\alpha u)_{o,q,\Omega_R}$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\dot{\Omega}_R} q^2 (x \cdot \nu) P_{2m}(x, \nu) \, |D^m_\nu u|^2 do + J_R(u)$$

für alle $u \in \mathring{H}^m_*(\Omega) \cap H^{2m}_*(\Omega)$.

Beweis:

Wir berechnen

$$D^\alpha(q^2 r D_r u) = D^\alpha(q^2 x_i D_i u)$$
$$= \delta q^2 \sum_{1 \leqq |\gamma| \leqq |\alpha|} O(1) D^\gamma u + q^2 |\alpha| D^\alpha u + q^2 r D_r D^\alpha u$$

und erhalten nach Def. des Operators L und des Restgliedes $J_R(u)$ mit part. Integration, wenn wir beim Randterm zu jedem α genau ein α_1 mit $|\alpha_1| = 1$, $\alpha_1 \leqq \alpha$, auswählen und (2.1) beachten,

$$\mathrm{Re}\,(Lu, r D_r u)_R =$$
$$= \mathrm{Re}\,((-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_{\alpha\beta} D^\beta u), (q^2 r D_r u))_{0,\Omega_R}$$
$$= \mathrm{Re}\,(a_{\alpha\beta} D^\beta u, q^2 |\alpha| D^\alpha u)_{0,\Omega_R}$$
$$+ \mathrm{Re}\,(a_{\alpha\beta} D^\beta u, q^2 r D_r D^\alpha u)_{0,\Omega_R} + J_R(u)$$
$$- \mathrm{Re} \sum_{\substack{|\alpha|=|\beta|=m \\ |\alpha_1|=1}} (\gamma^{\alpha_1} a_{\alpha\beta} D^\beta u, D^{\alpha-\alpha_1}(q^2 r D_r u))_{0,\dot{\Omega}_R}$$
$$= \mathrm{Re}\,(a_{\alpha\beta} D^\beta u, |\alpha| D^\alpha u)_R + J_R(u)$$
$$- \mathrm{Re} \int_{\Omega_R} q^2 (x\cdot\nu) P_{2m}(x,\nu) |D_\nu^m u|^2 \, do$$
$$+ \mathrm{Re}\,(a_{\alpha\beta} D^\beta u, q^2 r D_r D^\alpha u)_{0,\Omega_R} .$$

Zur Berechnung des letzten Termes betrachten wir

$$D_i(x_i q^2 a_{\alpha\beta}) = q^2(n a_{\alpha\beta} + \delta O(1) + r D_r a_{\alpha\beta}) ,$$

und es folgt mit part. Integration wieder über (2.1)

$$2\,\mathrm{Re}\,(q^2 a_{\alpha\beta} D^\beta u,\ r D_r D^\alpha u)_{o,\Omega_R} =$$

$$= \mathrm{Re} \int_{\Omega_R} q^2 \overline{a_{\alpha\beta}}\, r D_r (\overline{D^\beta u}\ D^\alpha u)\, dx$$

$$= -\mathrm{Re}\,(D_i (x_i q^2 a_{\alpha\beta}) D^\beta u,\ D^\alpha u)_{o,\Omega_R} + J_R(u)$$

$$+ \int_{\dot\Omega_R} q^2 (x\cdot\nu)\, P_{2m}(x,\nu)\ |D_\nu^m u|^2\, do$$

$$= -\mathrm{Re}\,((n a_{\alpha\beta} + r D_r a_{\alpha\beta}) D^\beta u,\ D^\alpha u)_R + J_R(u)$$

$$+ \int_{\dot\Omega_R} q^2 (x\cdot\nu)\, P_{2m}(x,\nu)\ |D_\nu^m u|^2\, do\ .$$

Insgesamt ergibt sich sofort die Beh..

Lemma 2.2.

Sei $(\forall I)(1)$, $(2)b)$ erfüllt und $u \in \overset{\circ}{H}{}^m_q(\Omega) \cap H^{2m}_q(\Omega)$. Dann gilt

$$\mathrm{Re} \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} \left\{ (a_{\alpha\beta} D^\beta u,\ |\alpha| D^\alpha u)_{o,q,\Omega} - \frac{1}{2} ((r D_r a_{\alpha\beta}) D^\beta u, D^\alpha u)_{o,q,\Omega} \right\} \leqq \tag{2.2}$$

$$c \left\{ (\delta+\varepsilon) \|u\|^2_{m,q,\Omega} + \|(A-k)u\|_{o,\varrho,\Omega} (\|D_r u\|_{o,q,\Omega} + \|u\|_{o,q,\Omega}) \right\}$$

$$+ \delta k \|u\|^2_{o,q,\Omega} + \frac{1}{2} \sup_R \int_{\dot\Omega_R} q^2 (x\cdot\nu)\, P_{2m}(x,\nu)\, |D_\nu^m u|^2\, do +$$

$$+ c_1 \|u\|_{m-1,q,\Omega} \|u\|_{m,q,\Omega}$$

und

$$k\|u\|^2_{o,q,\Omega} \leqq c \left\{ \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{o,q,\Omega} + c_1 \|u\|^2_{o,q,\Omega} \right. \tag{2.3}$$

$$\left. + \|(A-k)u\|_{o,q,\Omega} \|u\|_{o,q,\Omega} \right\}$$

mit von $\{u,k,\delta,\varepsilon\}$ unabh. Konstanten c, c_1 und $c_1 = \delta+\varepsilon$, falls $(\forall I)$ $(2)b)$ zutrifft (sonst genügt $(\forall I)$ (1)).

Beweis:

Wir berechnen

$$\mathrm{Re}((A-k)u,\ r\,D_r u)_R\,,\quad \mathrm{Re}((A-k)u,u)_R$$

und der Grenzübergang $R\longrightarrow\infty$ liefert dann die gewünschten Abschätzungen.
Nach Vor. ($\mathcal{V}$ I) erhalten wir mit part. Integration

$$\mathrm{Re}(Ru,\ r\,D_r u)_R = J_R(u)$$

und direkt

$$\mathrm{Re}(ku,\ r\,D_r u)_R = \tfrac{1}{2}k\int_{\Omega_R}(q^2 x_i)\,D_i\,|u|^2\,dx$$

$$= -\tfrac{1}{2}k\,((n-\delta\,\frac{2r^2}{1+r^2})\,u,u)_R + J_R(u).$$

Damit und nach Lemma 2.1 ergibt sich die Darstellung

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}((A-k)u,\ r\,D_r u)_R &= \mathrm{Re}((L+R-k)u,\ r\,D_r u)_R \qquad (2.4)\\ &= \mathrm{Re}(a_{\alpha\beta}\,D^\beta u,\ |\alpha|\,D^\alpha u)_R\\ &\quad -\tfrac{1}{2}n\left\{(a_{\alpha\beta}\,D^\beta u,\,D^\alpha u)_R - k\,\|u\|_R^2\right\}\\ &\quad -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,((r\,D_r\,a_{\alpha\beta})D^\beta u,\,D^\alpha u)_R - \delta\,k\,\|r(1+r^2)^{-\frac{1}{2}}u\|_R^2\\ &\quad -\tfrac{1}{2}\int_{\dot\Omega_R} q^2(x\cdot\nu)\,P_{2m}(x,\nu)\,|D_\nu^m u|^2\,do + J_R(u)\ .\end{aligned}$$

Den geschweiften Klammerausdruck berechnen wir entsprechend durch

$$\begin{aligned}((A-k)u,u)_R &= ((L+R-k)u,u)_R \qquad (2.5)\\ &= \left\{(a_{\alpha\beta}\,D^\beta u,\ D^\alpha u)_R - k\|u\|_R^2\right\} + J_R(u).\end{aligned}$$

Wegen $u \in H_q^{2m}(\Omega)$ gilt

$$\lim_{R \to \infty} \sum_{|\alpha| \leqq 2m} R \, \|D^\alpha u\|^2_{o,q,S_R} = o \, .$$

Für eine geeignete Teilfolge $R_j \longrightarrow \infty$ liefern schließlich (2.4), (2.5) die Abschätzung (2.2) und (2.5) die Abschätzung (2.3) mit $c_1 = \delta + \varepsilon$, falls ($\mathcal{V}$I) (2)b) gilt.

Wir zeigen

Lemma 2.3.

Sei ($\mathcal{V}$I) (1), (2) erfüllt und $u \in \overset{\circ}{H}{}_q^m(\Omega) \cap H_q^{2m}(\Omega)$.
Dann gilt mit von $\{u,k,\delta,\varepsilon\}$ unabh. Konstanten c, c_1, c_2

$$\sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|D^\alpha u\|^2_{o,q,\Omega} + k\|u\|^2_{o,q,\Omega} \leqq \tag{2.6}$$

$$c \Big\{ (\delta+\varepsilon) \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|D^\alpha u\|^2_{o,q,\Omega} + (c_1 + \delta k) \|u\|^2_{o,q,\Omega}$$

$$+ \|(A-k)u\|_{o,\varrho,\Omega} \|u\|_{o,q,\Omega} + \|(A-k)u\|^2_{o,\varrho,\Omega} \Big\}$$

$$+ c_2 \sup_R \int_{\Omega_R} q^2(x\cdot\nu) \, P_{2m}(x,\nu) \, |D^m_\nu u|^2 \, do \, ,$$

wobei $c_1 = \varepsilon + \delta$, falls ($\mathcal{V}$I) (2) zutrifft (sonst gen. ($\mathcal{V}$I) (1)).

Beweis:

Unsere Aufgabe besteht darin, die linke Seite von (2.2) nach unten durch die linke Seite von (2.6) abzuschätzen.

(i) Sei ($\mathcal{V}$I) (1) erfüllt.
Wenden wir die Garding'sche Ungleichung (Lemma 1.3) auf die Funktion $qu \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ an, so folgt leicht

$$\mathrm{Re}(a_{\alpha\beta} D^\beta u, |\alpha| D^\alpha u)_{o,q,\Omega} + \delta c \|u\|^2_{m,q,\Omega} \geqq$$

$$\geqq c_3 \|u\|^2_{m,q,\Omega} - c \|u\|^2_{o,q,\Omega}$$

und direkt aus (VI) (1)a) über das Interpolationslemma 1.4 (für qu)

$$|((r D_r a_{\alpha\beta}) D^\beta u, D^\alpha u)_{o,q,\Omega}| + 2c_1 \|u\|_{m-1,q,\Omega} \|u\|_{m,q,\Omega} \leqq$$
$$\leqq c\ (\varepsilon \|u\|_{m,q,\Omega} + \|u\|_{m-1,q,\Omega})\ \|u\|_{m,q,\Omega}$$
$$\leqq ((\varepsilon+\delta)c + c_3)\ \|u\|^2_{m,q,\Omega} + c\ \|u\|^2_{o,q,\Omega}\ .$$

Zusammen folgt dann die Ungleichung

$$\mathrm{Re}\ \{(a_{\alpha\beta} D^\beta u, |\alpha| D^\alpha u)_{o,q,\Omega} - \tfrac{1}{2}\ ((r D_r a_{\alpha\beta}) D^\beta u, D^\alpha u)_{o,q,\Omega} -$$
$$- c_1\ \|u\|_{m-1,q,\Omega} \|u\|_{m,q,\Omega}\} \geqq$$
$$\geqq \tfrac{1}{2} c_3\ \|u\|^2_{m,q,\Omega} - c\ \|u\|^2_{o,q,\Omega} - (\varepsilon+\delta)\ c\ \|u\|^2_{m,q,\Omega}$$

und mit (2.2), (2.3) die Beh. (2.6).

(ii) Sei (VI) (1), (2) erfüllt.
Zu der in (VI) (2)a) angegebenen Überdeckung $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ des $\mathbb{R}^n$ existiert eine Zerlegung der Eins $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ mit $\mathrm{Tr}(\varphi_i) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_i| \leqq \frac{3}{2\varepsilon}\}$ und der gleichmäßig in i,x geltenden Beziehung

$$D^\alpha \varphi_i(x) = O(\varepsilon),\ (\varepsilon \longrightarrow o),\ (1 \leqq |\alpha| \leqq 2m)\ . \qquad (2.7)$$

Dazu (vgl. Beweis des Lemma 1.1) wählen wir eine Glättungsfunktion $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ mit

$$\psi(r) = \begin{cases} 1 & , \ r \leqq 1 \\ o & , \ r \geqq \frac{3}{2} \end{cases} \quad , \ o \leqq \psi(r) \leqq 1 \text{ stets,}$$

und setzen

$$\psi_i(x) = \psi(|\varepsilon(x - x_i)|)$$

sowie

$$\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\left\{\sum_{j=1}^\infty \psi_j^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}}\ .$$

Analog zum Beweis der Garding'schen Ungleichung (Agmon [1], sec. 7) erhalten wir mit Fouriertransformation und der gleichmäßigen Überdeckung $\{U_i \cap \overline{\Omega}\}_{i=1}^{\infty}$ und der zugehörigen Zerlegung der Eins $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ von $\overline{\Omega}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\,(a_{\alpha\beta}\, D^{\beta} u,\ |\alpha|\, D^{\alpha} u)_{o,q,\Omega} \geqq \\ &\geqq c_3 \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|D^{\alpha} u\|^2_{o,q,\Omega} - (\varepsilon + \delta)\, c\, \|u\|^2_{m,q,\Omega}\,; \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dabei benutzen wir im Falle konstanter Koeffizienten die verschärfte Elliptizitätsbedingung ($\mathcal{V}$I) (2)c) und (2.7):

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leqq |\alpha|, |\beta|} \mathrm{Re}\,(a_{\alpha\beta}(x_i) D^{\beta}(\varphi_i q u),\ |\alpha|\, D^{\alpha}(\varphi_i q u))_{o,\Omega} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Re}\,(|\alpha|\, \xi^{\alpha}\, a_{\alpha\beta}(x_i)\, i^{|\beta|-|\alpha|} \xi^{\beta})\ |(\widehat{\varphi_i q u})(\xi)|^2\, d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|\, D_{|\xi|} P(x_i, \xi))\ |(\widehat{\varphi_i q u})(\xi)|^2\, d\xi \\ &\geqq 2\, c_3\, (e_1) \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|D^{\alpha}(\varphi_i q u)\|^2_{o,\Omega} \\ &\geqq c_3 \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|\varphi_i\, D^{\alpha} u\|^2_{o,q,\Omega} - (\varepsilon + \delta)\, c\, \|u\|^2_{m,q,U_i \cap \Omega}\,. \end{aligned}$$

Für den allgemeinen Fall variabler Koeffizienten beachten wir ($\mathcal{V}$I) (2)a) und erhalten dann mit (2.7) und Summation über alle i die Ungleichung (2.8).
Direkt folgt aus ($\mathcal{V}$I) (2)b)

$$|\,((r D_r a_{\alpha\beta})\, D^{\beta} u,\ D^{\alpha} u)_{o,q,\Omega}\,| \leqq \varepsilon\, c\, \|u\|^2_{m,q,\Omega}$$

und deshalb insgesamt nach (2.8)

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\left\{(a_{\alpha\beta}\, D^{\beta} u,\ |\alpha|\, D^{\alpha} u)_{o,q,\Omega} - \frac{1}{2}\,((r D_r a_{\alpha\beta}) D^{\beta} u, D^{\alpha} u)_{o,q,\Omega}\right\} \geqq \\ &\geqq c_3 \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|D^{\alpha} u\|^2_{o,q,\Omega} - (\varepsilon + \delta)\, c\, \|u\|^2_{m,q,\Omega} \end{aligned}$$

und mit (2.2), (2.3) die Beh. (2.6), wobei hier $c_1 = \varepsilon + \delta$.

Die angekündigten Eigenschaften des Spektrums von A liefert nun der

Satz 1.

Sei ($\mathcal{V}$I) erfüllt und $u \in \overset{\circ}{H}{}^{m}_{q}(\Omega) \cap H^{2m}_{q}(\Omega)$ mit

$$(A - k)\, u \in L^2_\varrho(\Omega) \ .$$

(i) Sei ($\mathcal{V}$I) (1), (3) erfüllt.
Dann existieren positive Zahlen k_o, δ_o, ε_o und zu jedem $k \geqq k_o$ ein $\mu_o(k)$, so daß für alle $\varepsilon \leqq \varepsilon_o$, $\delta \leqq \delta_o$, $k \geqq k_o$, $\mu \leqq \mu_o(k)$ mit einer von $\{u,k,\delta,\varepsilon,\mu\}$ unabh. Konstanten c gilt

$$\|u\|_{m,q,\Omega} \leqq c \ \| (A - k)\, u \|_{o,\varrho,\Omega} \quad . \tag{2.9}$$

(ii) Sei ($\mathcal{V}$I) erfüllt.
Dann existieren zu jedem $k > o$ positive Zahlen $\varepsilon_1(k)$, $\delta_1(k)$, $\mu_1(k)$, so daß für alle $\varepsilon \leqq \varepsilon_1$, $\delta \leqq \delta_1$, $\mu \leqq \mu_1$ mit einer von $\{u,\delta,\varepsilon,\mu\}$ unabh., von k abh. Konstanten c ebenfalls (2.9) gilt.

Beweis:

Der Beweis folgt leicht aus Lemma 2.3, wenn wir noch den Randterm abschätzen. Dabei geht auch die Bedingung $\overline{\Omega}$ gleichmäßig von der Klasse C^{2m} ein.
Nach ($\mathcal{V}$I) (3) und Lemma 1.2 , 1.6 erhalten wir mit einer von $\{u,k,\delta,\varepsilon,\mu\}$ unabh., vom "Atlas" auf $\overline{\Omega}$ (s. Def. 2) abh. Konstanten $c_4 = c_4(\overline{\Omega})$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} c_2 \sup_R \int_{\dot{\Omega}_R} q^2(x,\nu)\, P_{2m}(x,\nu)\, |D^m_\nu u|^2 \, do &\leqq \mu c \ \|D^m_\nu(qu)\|^2_{o,\dot{\Omega}} \quad \leqq \\ &\leqq \mu c \ \|qu\|^2_{m+1,\Omega} \quad \leqq \mu c \ \|u\|^2_{2m,q,\Omega} \\ &\leqq \mu c \ (\|Au\|^2_{o,q,\Omega} + \|u\|^2_{o,q,\Omega}) \\ &\leqq \mu c \ \|(A-k)u\|^2_{o,q,\Omega} + \mu c_4 (1+k^2) \|u\|^2_{o,q,\Omega} . \end{aligned}$$

Wählen wir insbesondere

$$\mu c_4 \frac{1+k^2}{k} \leqq \frac{1}{2} ,$$

so folgt leicht alles Gewünschte.

Wir bemerken:
Statt (2.9) erhalten wir über Lemma 1.6 auch

$$\|u\|_{2m,q,\Omega} \leqq c \quad \|(A-k)\,u\|_{o,q,\Omega} .$$

Mit der

Definition 4.

Das mit q gewichtete Punktspektrum von A ist

$$\sigma_p(A,q) = \{k \in \mathbb{R} : \text{es gibt ein } u \in \overset{\circ}{H}{}^m_q(\Omega) \cap H^{2m}_q(\Omega) \text{ mit } (A-k)u = o ,\ \|u\|_{m,q,\Omega} = 1\}$$

folgt sofort ein

Korollar.

Seien die Voraussetzungen des Satz 1 erfüllt.
Dann ist $k \notin \sigma_p(A,q)$.

§3 Die Charakteristikenfunktion

Wir definieren nun die Charakteristikenfunktion $s = s(x)$, die wir zur Erklärung des Begriffes Strahlungslösung brauchen, und stellen einige Eigenschaften zusammen. Zuvor geben wir die allgemeinen Bedingungen an, unter den wir A-priori-Abschätzungen, Existenz und Eindeutigkeit von Strahlungslösungen untersuchen.
Es gelte die

Voraussetzung ($\mathcal{V}$ II)

(1)a) Sei

$$P^*(\xi) = \sum_{|\alpha|,\,|\beta| \leqq m} \xi^{\alpha} a^*_{\alpha\beta}\, i^{|\beta|-|\alpha|}\, \xi^{\beta} \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

ein Polynom mit konstanten Koeffizienten

$$\{a^*_{\alpha\beta}\}\ ,\quad a^*_{\alpha\beta} = \overline{a^*_{\beta\alpha}}\ ,\quad a^*_{oo} = o\ .$$

Sei $k \in \mathbb{R}$, $k > o$, und

$$N(P^*) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : P^*(\xi) - k = o\}\ .$$

Es gelten die Bedingungen

$$D_\eta P^*(\eta) \neq o$$

$$\left\{D_{\eta_i \eta_j} P^*(\eta)\right\}_{i,j=1}^{n} \quad \text{positiv definit} \qquad (3.1)$$

für alle $\eta \in N(P^*)$ und

$N(P^*)$ ist zusammenhängend,

sowie

$$P^*_{2m}(\xi) := \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \xi^{\alpha}\, a^*_{\alpha\beta}\, \xi^{\beta} \geqq e_2\, |\xi|^{2m} \qquad (3.2)$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit einer positiven Konstanten e_2.

b) Außerdem genüge für jedes feste $\eta \in N(P^*)$ die Funktion

$$\Phi(\eta, \xi) = P^*(\eta+\xi) - D_\eta P^*(\eta)\cdot\xi - P^*(\eta)$$

der Forderung

$$|\xi|\, D_{|\xi|}\, \Phi(\eta, \xi) > \Phi(\eta, \xi) > 0 \tag{3.3}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

(2) Sei $\overline{\Omega}$ gleichmäßig von der Klasse C^{2m} und

$$q(x) = (1+|x|^2)^{-\frac{\delta}{2}}, \quad \varrho(x) = (1+|x|^2)^{\frac{1-\delta}{2}}, \quad 0 < \delta \leqq \tfrac{1}{2} ,$$

$$p(x) = (1+|x|^2)^{-\frac{1}{4}-\frac{\delta}{2}} , \quad \Omega^1 = \{ x \in \Omega : |x| > 1 \} .$$

Sei

$$A = L + R , \quad f \in L^2_\varrho(\Omega)$$

mit

$$L = \sum_{|\alpha|,\,|\beta| \leqq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta) , \quad a_{\alpha\beta} = \overline{a_{\beta\alpha}} ,$$

der Elliptizitätsbedingung

$$P_{2m}(x,\xi) := \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \xi^\alpha a_{\alpha\beta}(x) \xi^\beta \geqq e_3 |\xi|^2$$

für alle $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit einer positiven Konstanten e_3 und

$$R = \sum_{|\alpha| \leqq 2m-1} r_\alpha(x) D^\alpha$$

mit Koeffizienten $\{a_{\alpha\beta}\}$, $\{r_\alpha\}$, die den folgenden Regularitätsbedingungen und dem asymptotischen Verhalten für $|x| \longrightarrow \infty$ mit einer positiven Zahl ε , $0 < \varepsilon \leqq 1$, und

$$\ell(\alpha,\beta) := \max \left(|\alpha|, \left[\frac{|\alpha+\beta|+1}{2} \right] \right)$$

genügen.

a) $$a_{\alpha\beta} \in C_*^{\ell(\alpha,\beta)+1}(\overline{\Omega}) ,$$

$$a_{\alpha\beta}(x) - a^*_{\alpha\beta} = O(|x|^{-1})$$

$$D_{|x|} D^\gamma a_{\alpha\beta}(x) = O(|x|^{-2}) \quad (0 \leqq |\gamma| \leqq \ell(\alpha,\beta))$$

$$D^\gamma a_{\alpha\beta}(x) = O(|x|^{-\frac{3}{2}}) \quad (2 \leqq |\gamma| \leqq \ell(\alpha,\beta))$$

und entweder

$$D_{x_i} a_{\alpha\beta}(x) = O(|x|^{-\frac{3}{2}}) \quad (i = 1,\ldots,n)$$

oder

$$D_{x_i} a_{\alpha\beta}(x) = \varepsilon\, O(|x|^{-1}) \quad \text{mit}$$

$$a_{\alpha\beta} \in C_*^{m+1}(\overline{\Omega}) ,$$

$$D^\gamma a_{\alpha\beta}(x) = O(|x|^{-\frac{3}{2}}) \quad (\ell(\alpha,\beta) < |\gamma| \leqq m+1) .$$

b) $$r_\alpha \in C_*^1(\overline{\Omega})$$

$$r_\alpha \in C_*^{|\alpha|-m}(\overline{\Omega}) \quad (|\alpha| > m) ,$$

$$D_{|x|}\, r_\alpha(x) = O(|x|^{-2})$$

$$D^\gamma\, r_\alpha(x) = O(|x|^{-\frac{3}{2}}) \quad (1 \leqq |\gamma| \leqq |\alpha| - m)$$

und entweder

$$r_\alpha(x) = O(|x|^{-\frac{3}{2}})$$

oder

$$r_\alpha(x) = \varepsilon\, O(|x|^{-1}) \quad \text{mit}$$

$$r_\alpha \in C_*^m(\overline{\Omega}) ,$$

$$D^\gamma r_\alpha = O(|x|^{-\frac{3}{2}}) \quad (1 \leqq |\gamma| \leqq m) .$$

(3)a) R ist symmetrisch auf

$$\mathring{H}^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

oder

b) Es gibt eine positive Nullfolge $\{\lambda_\nu\}$ mit $k_\nu = k + i\lambda_\nu \in \varrho(A)$, wobei $\varrho(A)$ die Resolventenmenge des Operators A mit dem Definitionsbereich

$$\mathring{H}^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ ist .}$$

(4)a) Auf $\dot{\Omega}$ sei für alle hinreichend großen $|x|$, $x \in \dot{\Omega}$,

$$x \cdot \nu(x) \leqq \frac{\gamma_o}{|x|}$$

mit einer Konstanten γ_o.

oder

b) Auf $\dot{\Omega}$ sei für alle hinreichend großen $|x|$, $x \in \dot{\Omega}$,

$$x \cdot \nu(x) \leqq \mu$$

mit einer Zahl μ, $o \leqq \mu \leqq 1$, und $\overline{\Omega}$ r-gleichmäßig von der Klasse C^{2m} (Def. 3).

Bemerkung 2.

(i) Die Parameter δ, ε, μ wählen wir noch hinreichend klein (Satz 3,4).

(ii) (∇II) (1) entspricht den Bedingungen bei (Vainberg [18]).

(iii) (3.1) besagt, daß $N(P^*)$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit positiver Gauß'scher Krümmung ist (insbes.).

(iv) Die Funktion $\Phi(\eta, \xi)$ läßt sich auch über die (Taylor-) Entwicklung

$$P^*(\eta + \xi) = \sum_\gamma \frac{1}{\gamma!} D_\eta^\gamma P^*(\eta) \xi^\gamma$$

durch

$$\Phi(\eta, \xi) = \sum_{|\gamma| \geqq 2} \frac{1}{\gamma!} D_\eta^\gamma P^*(\eta) \xi^\gamma \qquad (3.4)$$

darstellen.

Für kleine $|\xi| \neq o$ ist die Bedingung ($\mathcal{V}$ II) (1)b) sicher erfüllt, wie leicht aus

$$\Phi(\eta, \xi) = \sum_{|\gamma|=2} \frac{1}{\gamma!} D_\eta^\gamma P^*(\eta)\xi^\gamma + \sum_{|\gamma|\geq 3} \frac{1}{\gamma!} D_\eta^\gamma P^*(\eta)\xi^\gamma \qquad (3.5)$$

$$= \frac{1}{2} \xi_i D_{\eta_i \eta_j} P^*(\eta) \xi_j + o(|\xi|^3)$$

und

$$|\xi| D_{|\xi|} \Phi(\eta, \xi) = \xi_i D_{\eta_i \eta_j} P^*(\eta) \xi_j + o(|\xi|^3)$$

über (3.1) folgt (s. auch Lemma 3.1).
($\mathcal{V}$ II) (1) b) bedeutet eine verschärfte Elliptizität des Operators B (s. §4).

(v) Bei ($\mathcal{V}$ II) (2) brauchen wir also bei schwächerem asymptotischen Verhalten stärkere Differenzierbarkeit.

(vi) Die Abschwächung in ($\mathcal{V}$ II) (4)

$$x \cdot \nu(x) \geqq \mu \text{ gegenüber } x \cdot \nu(x) \geqq \frac{\gamma_o}{|x|} \text{ auf } \dot{\Omega}$$

erkauft man durch eine stärkere (globale) Gleichmäßigkeit von $\bar{\Omega}$ (s. auch Lemma 6.4).

(vii) Bezgl. ($\mathcal{V}$ II) (4) gilt auch die Bemerkung 1(iv).

Wir geben eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit von ($\mathcal{V}$ II) (1) b) an.

Lemma 3.1.

Sei ($\mathcal{V}$ II) (1)a) erfüllt und

$$D^2_{|\xi|} \Phi(\eta, \xi) \geqq o$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in N(P^*)$.
Dann gilt auch ($\mathcal{V}$ II) (1)b) .

Bemerkung 3.

(i) Es ist $D^2_{|\xi|}\,\Phi(\eta,\xi) \geqq 0$ sicher dann, wenn wegen

$$|\xi|^2\, D^2_{|\xi|}\,\Phi(\eta,\xi) = \xi_i\; D_{\xi_i\xi_j} P^*(\eta+\xi)\,\xi_j$$

die Matrix $\left\{D_{\xi_i\xi_j} P^*(\xi)\right\}_{i,j,=1}^{n}$ semipositiv definit ist für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Zum Beispiel erfüllt das Polynom

$$P^*(\xi) = (\,\xi_i\, a^*_{ij}\, \xi_j)^m + \varepsilon\, Q^*(\xi)\,,$$

wobei $\{a^*_{ij}\}$ hermitesch, positiv definit und Q^* ein bel. Polynom der Ordnung 2m ist, für alle genügend kleinen $|\varepsilon|$ die in (i) angegebene Bedingung.

Beweis von Lemma 3.1 :

Sei $\eta \in N(P^*)$ fest. Wir definieren für

$$\hat{\xi} \in S_1^{n-1}\,,\quad \xi = t\hat{\xi}\,,\quad |\xi| = t$$

die Funktionen

$$\varphi(t) = \Phi(\eta,\xi)$$

$$\psi(t) = |\xi|\, D_{|\xi|}\,\Phi(\eta,\xi) - \Phi(\xi) = t\, D_t\,\varphi(t) - \varphi(t)\,.$$

Die Beziehungen

$$\varphi(0) = 0\,,\quad \varphi'(0) = 0\,,\quad \varphi''(t) \geqq 0 \quad \text{für alle } t \geqq 0$$

und

$$\psi(0) = 0\,,\quad \psi'(t) = t\,\varphi''(t) \geqq 0 \quad \text{für alle } t \geqq 0$$

sowie nach (3.5)

$$\varphi(t) > 0,\quad \psi(t) > 0 \quad \text{für alle hinreichend kleinen } t > 0$$

ergeben sofort die gewünschte Eigenschaft

$$\varphi(t) > o\ ,\quad \psi(t) > o \qquad \text{für alle } t > o\ .$$

Das nächste Lemma klärt die Bedeutung von (VII) (1)b).

Lemma 3.2.

Sei (VII) (1) erfüllt.
Dann gilt mit einer von $\eta \in N(P^*)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ unabhängigen Konstanten $e_4 > o$

$$\begin{aligned} &\Phi(\eta, \xi) \geqq e_4(|\xi|^2 + |\xi|^{2m}) \\ &|\xi|\, D_{|\xi|}\, \Phi(\eta, \xi) - \Phi(\eta, \xi) \geqq e_4\,(|\xi|^2 + |\xi|^{2m}). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Beweis:

Wir benutzen die Bezeichnungen vom Beweis des Lemma 3.1. Sei c eine allgemeine von $\{\eta, \xi\}$ unabh. Konstante.
Für $t \longrightarrow o$ gilt nach (3.5)

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} t^2\ (\hat{\xi}_i\, D_{\eta_i \eta_j}\, P^*(\eta)\ \hat{\xi}_j) + O(t^3)$$

und

$$\psi(t) = \frac{1}{2} t^2\ (\hat{\xi}_i\, D_{\eta_i \eta_j}\, P^*(\eta)\ \hat{\xi}_j) + O(t^3)$$

gleichmäßig in $(\eta, \hat{\xi}) \in N(P^*) \times S_1^{n-1}$.
Die stetige, positive Funktion

$$\hat{\xi}_i\, D_{\eta_i \eta_j}\, P^*(\eta)\, \hat{\xi}_j$$

ist auf dem Kompaktum $S_1^{n-1} \times N(P^*)$ gleichmäßig positiv nach unten beschränkt und somit existiert ein $t_o > o$ mit

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\geqq c\ t^2 \\ \psi(t) &\geqq c\ t^2 \end{aligned}$$

für alle $o \leqq t \leqq t_o$.

Andererseits gilt nach (3.4) für $t \longrightarrow \infty$

$$\varphi(t) = t^{2m} \sum_{|\gamma|=2m} \frac{1}{\gamma!} D_\eta^\gamma P^*(\eta) \hat{\xi}^\gamma + O(t^{2m-1})$$

$$= t^{2m} P^*_{2m}(\hat{\xi}) + O(t^{2m-1})$$

und

$$\psi(t) = (2m-1)t^{2m} P^*_{2m}(\hat{\xi}) + O(t^{2m-1})$$

gleichmäßig auf $N(P^*) \times S_1^{n-1}$.
Über (3.2) folgt dann mit einer Konstanten $t_1 < \infty$

$$\varphi(t) \geqq c\, t^{2m}$$

$$\psi(t) \geqq c\, t^{2m}$$

für alle $t \geqq t_1$.

Auf dem restlichen Kompaktum $N(P^*) \times \{t : t_o \leqq t \leqq t_1\}$ folgt aus Stetigkeitsgründen und (3.3)

$$\varphi(t) \geqq c$$

$$\psi(t) \geqq c$$

und damit die gesamte Beh..

Wir definieren nun (vgl. Vainberg [18]) unter der Vor. (ν II) (1) a) die Funktion s:

Definition 5.

Zu jedem $\hat{x} \in S_1^{n-1}$ existiert genau ein $\sigma(\hat{x}) \in N(P^*)$, so daß mit einer reellen Funktion $\varkappa = \varkappa(\hat{x})$

$$\hat{x} = \varkappa(\hat{x})\, D_\xi P^*(\sigma(\hat{x})) \tag{3.7}$$

und

$$\hat{x} \cdot \sigma(\hat{x}) > 0$$

gilt.
Dann heißt die durch

$$s(x) = \sigma(\hat{x}) \cdot x \qquad (\hat{x} = \frac{x}{|x|})$$

definierte Funktion

$$s \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n - \{o\}) \cap C^{o}(\mathbb{R}^n)$$

mit

$$Ds(x) = \sigma(\hat{x})$$

und

$$P^*(Ds) = k$$

Charakteristikenfunktion von $N(P^*)$.

Wir setzen noch stets

$$\sigma = Ds(x) \ .$$

Bemerkung 4.

(i) Die Abbildung

$$\hat{x} \in S_1^{n-1} \longrightarrow \sigma(\hat{x}) \in N(P^*)$$

ist die Umkehrabbildung der Gauß'schen Abbildung

$$\sigma \in N(P^*) \longrightarrow \nu(\sigma) \in S_1^{n-1} \ ,$$

wobei $\nu(\sigma)$ die Normale an $N(P^*)$ im Punkt σ mit $\sigma\nu(\sigma) > o$ ist (Schulenberger-Wilcox [17], S. 22).

(ii) Zur Bezeichnung Charakteristikenfunktion vgl. (Hörmander [5], S. 38).

Wir benötigen das

Lemma 3.3.

Sei (V II) (1)a) erfüllt. Dann ist

$$\varkappa \in C^{\infty}(S_1^{n-1}),\ \varkappa(\hat{x}) = s(\hat{x}) \quad (|\sigma(\hat{x})|\, D_{|\xi|} P^*(\sigma(\hat{x}))\,)^{-1} > o \text{ auf } S_1^{n-1} \tag{3.8}$$

und für alle $|x| \geqq 1$

$$\sum_{i=1}^{n} D_{x_i}(D_{\xi_i} P^*(\sigma)) = \frac{(n-1)}{|x|\varkappa} \tag{3.9}$$

$$D^{\gamma}\sigma = O(|x|^{-|\gamma|}) \qquad (|\gamma| \geqq o) \ . \tag{3.10}$$

Beweis:

Die Beziehung (3.7) liefert

$$\hat{x} \cdot \sigma = \varkappa(\hat{x}) \sigma \, D_{\xi} \, P^{*}(\sigma) = \varkappa(\hat{x}) \, |\sigma| \, D_{|\xi|} \, P^{*}(\sigma)$$

und somit (3.8).
Differenzieren wir

$$\hat{x}_i = \varkappa \, D_{\xi_i} \, P^{*}(\sigma)$$

nach x_i und summieren über $i = 1, \ldots, n$, so folgt

$$D_{x_i}(\hat{x}_i) = D_{x_i} \varkappa \, D_{\xi_i} \, P^{*}(\sigma) + \varkappa \, D_{x_i}(D_{\xi_i} \, P^{*}(\sigma))$$

$$= \frac{1}{\varkappa} D_r \varkappa(\hat{x}) + \varkappa \, D_{x_i}(D_{\xi_i} \, P^{*}(\sigma))$$

und mit

$$D_{x_i}(\hat{x}_i) = \Delta r = \frac{(n-1)}{r}$$

$$D_r \varkappa(\hat{x}) = o$$

die Beh. (3.9).
(3.10) ist klar, da $\sigma = \sigma(\hat{x})$ gilt.

§4 Die Kommutatorgleichung

In diesem Paragraphen transformieren wir die Dgl.

$$(A - k)\, u = f$$

auf eine Form

$$(B + R_2^*)\, e^{-is}\, u = e^{-is}\, f$$

mit einem geeigneten Differentialoperator B, einem asymptotisch verschwindenden Restoperator R_2^* und der in Def. 5 angegebenen Charakteristikenfunktion $s = s(x)$, d.h. wir kommutieren e^{-is} A.
Im folgenden sei stets

$$R^* = \sum_{|\alpha| \leqq 2m-1} r_\alpha^*\, D^\alpha \tag{4.1}$$

ein Restglied-Operator mit Koeffizienten $\{r_\alpha^*\}$, die auf $\Omega^1 = \{x \in \Omega : |x| > 1\}$ den gleichen Bedingungen (⁀II) (2)b) wie $\{r_\alpha\}$ genügen.
Damit können wir den Operator A auch wie folgt darstellen (s. (⁀II) (1)).

$$A = L_1 + R_1^*$$

mit

$$L_1 = \sum_{|\alpha|,\,|\beta| \leqq m} (-1)^{|\alpha|}\, a_{\alpha\beta}\, D^{\alpha+\beta} = \sum_{|\gamma| \leqq 2m} i^{-|\gamma|} a_\gamma\, D^\gamma \tag{4.2}$$

und

$$a_\gamma = \sum_{\substack{\alpha+\beta=\gamma \\ |\alpha|,\,|\beta| \leqq m}} a_{\alpha\beta}\, i^{|\beta|-|\alpha|} \quad .$$

Sei noch das reelle Polynom

$$P(x,\xi) := \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqq m} a_{\alpha\beta}(x)\, i^{|\beta|-|\alpha|}\, \xi^{\alpha+\beta} = \sum_{|\gamma| \leqq 2m} a_\gamma(x) \xi^\gamma \tag{4.3}$$

für $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ erklärt analog zu $P^*(\xi)$.

Mit der Charakteristikenfunktion $s = s(x)$ gemäß Def. 5 und $\sigma = Ds(x)$ definieren wir auf Ω^1

$$b_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} 2^{-\frac{||\alpha|-|\beta||}{2}} \frac{1}{(|\alpha|+|\beta|)!} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \frac{|\beta|!}{\beta!} D_\xi^{\alpha+\beta} (P(x,\sigma)-k)\, i^{|\alpha|-|\beta|}, & ||\alpha|-|\beta|| \leq 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \tag{4.4}$$

und entsprechend $\{b^*_{\alpha\beta}(x)\}$ bezgl. $P^*(\sigma)$.
Es gilt dann die Hermitezität

$$b_{\alpha\beta} = \overline{b_{\beta\alpha}}$$

und mittels Lemma 1.8 für den Hauptteil

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \xi^\alpha b_{\alpha\beta}(x) \xi^\beta &= \sum_{|\gamma|=2m} \frac{1}{\gamma!} D_\xi^\gamma P(x,\sigma) \xi^\gamma \\ &= \sum_{|\gamma|=2m} a_\gamma(x) \xi^\gamma = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \xi^\alpha a_{\alpha\beta}(x) \xi^\beta = P_{2m}(x,\xi). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Weiter definieren wir die symmetrischen Differentialoperatoren in Divergenzform (auf Ω^1)

$$B = \sum_{|\alpha|,\,|\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (b_{\alpha\beta} D^\beta) \tag{4.6}$$

$$B' = \sum_{1 \leq |\alpha|,\,|\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (b_{\alpha\beta} D^\beta)$$

$$B_1 = \sum_{|\alpha|+|\beta|=1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (b_{\alpha\beta} D^\beta)$$

Es gilt dann

$$B = (P(x,\sigma) - k) + B_1 + B' .$$

Wir zeigen eine andere Darstellung der B-Operatoren.

Lemma 4.1.

Sei ($\forall$ II) (1)a), (2) erfüllt.
Dann ist

$$B' = \sum_{|\gamma| \geqq 2} i^{-|\gamma|} \frac{1}{\gamma!} D_\xi^\gamma P(x,\sigma) D^\gamma + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\substack{|\gamma| \geqq 1 \\ |\varepsilon| = 1}} i^{-|\gamma|-1} \frac{1}{\gamma!} D_x^\varepsilon \left(D_\xi^{\varepsilon+\gamma} P(x,\sigma)\right) D^\gamma + R^*$$

$$B_1 = -i \sum_{|\varepsilon|=1} \left\{ D_\xi^\varepsilon P(x,\sigma) D^\varepsilon + \frac{1}{2} D_x^\varepsilon \left(D_\xi^\varepsilon P(x,\sigma)\right) \right\} \\ = -i \left\{ \frac{1}{\varkappa} D_r + \sum_{|\varepsilon|=1} D_\xi^\varepsilon \left(P(x,\sigma) - P^*(\sigma)\right) D^\varepsilon + \frac{(n-1)}{2\varkappa r} \right\} + R^*$$

und

$$B = (P(x,\sigma) - k) + B_1 + B' .$$

Beweis:

Wir beachten:
Die Ableitungen der Ordnung 2 bis $|\alpha|$ der Koeffizienten $\{b_{\alpha\beta}\}$ ($|\alpha| \geqq 2$) liefern Funktionen vom Typ $r^*_{\alpha''} \in C^1_*(\overline{\Omega})$ mit dem asymptotischen Verhalten $r^*_{\alpha''} = O(|x|^{-\frac{3}{2}})$, da in der Darstellung (4.4) nur Koeffizienten $a_{\alpha'\beta'}(x)$ mit $|\alpha'+\beta'| \geqq |\alpha+\beta|$ auftreten, die höchstens $|\alpha|$-fach, $|\alpha| \leqq \ell(\alpha,\beta) \leqq \ell(\alpha',\beta')$, nach x differenziert werden. Mit dieser Bemerkung, Lemma 1.8 und der Substitution $\alpha = \tau + \varepsilon$ beim Term $D_x^\varepsilon b_{\alpha\beta}$ erhalten wir die Gleichung

$$B' = \sum_{1 \leqq |\alpha|,\ |\beta| \leqq m} (-1)^{|\alpha|} b_{\alpha\beta} D^{\alpha+\beta} + \\ + \sum_{\substack{1 \leqq |\alpha|,\ |\beta| \leqq m \\ |\varepsilon|=1}} (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\varepsilon} \left(D_x^\varepsilon b_{\alpha\beta}\right) D^{\alpha-\varepsilon+\beta} + R^*$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \left\{ \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} \frac{1}{(2k)!} \frac{k!}{\alpha!} \frac{k!}{\beta!} D_\xi^{\alpha+\beta} P(x,\sigma) D^{\alpha+\beta} \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{|\tau|=k-1 \\ |\beta|=k \\ |\varepsilon|=1}} \frac{1}{(2k)!} \frac{k!}{\tau!} \frac{k!}{\beta!} D_x^\varepsilon \left(D_\xi^{\varepsilon+(\tau+\beta)} P(x,\sigma)\right) D^{\tau+\beta} \right\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} i(-1)^{k+1} \left\{ \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ |\beta|=k+1}} \frac{1}{(2k+1)!} \frac{k!}{\alpha!} \frac{(k+1)!}{\beta!} D_\xi^{\alpha+\beta} P(x,\sigma) D^{\alpha+\beta} \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{|\tau|=k-1 \\ |\beta|=k+1 \\ |\varepsilon|=1}} \frac{1}{(2k+1)!} \frac{k!}{\tau!} \frac{(k+1)!}{\beta!} D_x^\varepsilon \left(D_\xi^{\varepsilon+(\tau+\beta)} P(x,\sigma)\right) D^{\tau+\beta}$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{\substack{|\tau|=k \\ |\beta|=k \\ |\varepsilon|=1}} \frac{1}{(2k+1)!} \frac{(k+1)!}{\tau!} \frac{k!}{\beta!} D_x^\varepsilon \left(D_\xi^{\varepsilon+(\tau+\beta)} P(x,\sigma)\right) D^{\tau+\beta} \right\}$$

$$+ R^*$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \left\{ \sum_{|\gamma|=2k} \frac{1}{\gamma!} D_\xi^\gamma P(x,\sigma) D^\gamma + \sum_{\substack{|\gamma|=2k-1 \\ |\varepsilon|=1}} \frac{1}{2} D_x^\varepsilon \left(D_\xi^{\varepsilon+\gamma} P(x,\sigma)\right) D^\gamma \right\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} i(-1)^{k+1} \left\{ \sum_{|\gamma|=2k+1} \frac{1}{\gamma!} D_\xi^\gamma P(x,\sigma) D^\gamma + \sum_{\substack{|\gamma|=2k \\ |\varepsilon|=1}} \frac{1}{2} D_x^\varepsilon \left(D_\xi^{\varepsilon+\gamma} P(x,\sigma)\right) D^\gamma \right\}$$

$$+ R^*$$

und damit die gewünschte Darstellung von B'.

Die Gestalt von B_1 folgt aus der Definition (4.6), (Ⅵ II) (2) mit (4.1), Def. 5 ((3.7)) und Lemma 3.3 ((3.9))

$$B_1 = -i \sum_{|\varepsilon|=1} (D_\xi^\varepsilon P(x,\sigma)\, D^\varepsilon + \frac{1}{2} D_x^\varepsilon (D_\xi^\varepsilon P(x,\sigma)))$$

$$= -i \sum_{|\varepsilon|=1} (D_\xi^\varepsilon P^*(\sigma)\, D^\varepsilon + D_\xi^\varepsilon [P(x,\sigma) - P^*(\sigma)] D^\varepsilon$$

$$+ \frac{1}{2} D_x^\varepsilon (D_\xi^\varepsilon P^*(\sigma)) + r_o^*)$$

$$= -i \left(\frac{1}{\varkappa} D_r + D_\xi^\varepsilon [P(x,\sigma) - P^*(\sigma)] D^\varepsilon + \frac{(n-1)}{2\varkappa r} + r_o^* \right) .$$

Damit ist Lemma 4.1. bewiesen.

Zur weiteren Vorbereitung zeigen wir für die Charakteristikenfunktion $s = s(x)$ mit $\sigma^\varepsilon = D^\varepsilon s$ ($|\varepsilon| = 1$) das

Lemma 4.2.

Sei (γ II) (1)a) erfüllt.
Dann gilt

$$D^\tau e^{is} = (i^{|\tau|} \sigma^\tau + i^{|\tau|-1} \sum_{|\delta|=2} \binom{\tau}{\delta} \sigma^{\tau-\delta} D^\delta s + g)\, e^{is}$$

mit einer Funktion $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{o\})$,
die das asymptotische Verhalten

$$D^\gamma g(x) = O(|x|^{-2}) \quad (|\gamma| \geqq o)$$

für $|x| \longrightarrow \infty$ besitzt.

Beweis:

Sei g eine allgemeine Funktion mit den angegebenen Eigenschaften.
Wir beweisen die Beh. durch Induktion nach $|\tau|$.
Es gilt für

$|\tau| = 1$: $D^\tau e^{is} = i \sigma^\tau e^{is}$

und

$|\tau| = 2$: ($\tau = \varepsilon + \tau_1$, $|\tau_1| = 1$)

$$D^\tau e^{is} = D^\varepsilon (i \sigma^{\tau_1} e^{is})$$

$$= (i^2 \sigma^\tau + i D^\tau s)\, e^{is} .$$

Sei nun allgemein

$$|\tau| = n+1 \ , \ \tau = \varepsilon + \tau_n \text{ mit } |\tau_n| = n \ (\geq 2)$$

und die Beh. für τ_n bewiesen.
Es folgt über (3.10)

$$\begin{aligned} D^{\tau} e^{is} &= D^{\varepsilon} \ (D^{\tau_n} e^{is}) \\ &= D^{\varepsilon} \left\{ (i^n \sigma^{\tau_n} + i^{n-1} \sum_{|\delta|=2} \binom{\tau_n}{\delta} \sigma^{\tau_n - \delta} D^{\delta} s + g) \, e^{is} \right\} \\ &= (i^n \sum_{|\gamma|=1} \binom{\tau_n}{\gamma} \sigma^{\tau_n - \gamma} D^{\varepsilon} \sigma^{\gamma} + g) \, e^{is} \\ &\quad + (i^n \sigma^{\tau_n} + i^{n-1} \sum_{|\delta|=2} \binom{\tau_n}{\delta} \sigma^{\tau_n - \delta} D^{\delta} s + g) \, (i \sigma^{\varepsilon} e^{is}) \\ &= \Big\{ i^{n+1} \sigma^{\tau} + i^n \Big(\sum_{|\delta|=2} \binom{\tau_n}{\delta} \sigma^{\tau_n + \varepsilon - \delta} D^{\delta} s + \sum_{|\gamma|=1} \binom{\tau_n}{\gamma} \sigma^{\tau_n - \gamma} D^{\varepsilon + \gamma} s \Big) \\ &\qquad + g \Big\} e^{is} \ . \end{aligned}$$

Benutzen wir die Relationen ($|\delta| = 2$, $|\varepsilon| = 1$)

$$\left.\begin{aligned} \binom{\delta}{\varepsilon} = 0 : \ \binom{\tau_n + \varepsilon}{\delta} &= \binom{\tau_n}{\delta} \\ \binom{\delta}{\varepsilon} = 1 : \ \binom{\tau_n + \varepsilon}{\delta} &= \binom{\tau_n}{\delta} + \binom{\tau_n}{\delta - \varepsilon} \\ \binom{\delta}{\varepsilon} = 2 : \ \binom{\tau_n + \varepsilon}{\delta} &= \binom{\tau_n}{\delta} + \binom{\tau_n}{\varepsilon} \ , \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

so erhalten wir die Zerlegung

$$\sum_{|\delta|=2} \binom{\tau_n + \varepsilon}{\delta} \sigma^{\tau_n + \varepsilon - \delta} D^{\delta} s = \sum_{|\delta|=2} \binom{\tau_n}{\delta} \sigma^{\tau_n + \varepsilon - \delta} D^{\delta} s + \sum_{|\gamma|=1} \binom{\tau_n}{\gamma} \sigma^{\tau_n - \gamma} D^{\varepsilon + \gamma} s \ ,$$

wenn wir jeweils in (4.7) die ersten und die zweiten Summanden zusammenfassen und für den zweiten Term $\delta = \varepsilon + \gamma$ substituieren.
Jetzt folgt die Beh. einfach.

Den Zusammenhang zwischen den Operatoren A und B klärt der

Satz 2.

Sei ($\mathcal{V}$ II) (1)a), (2) erfüllt.
Dann gilt auf Ω^1 die Vertauschungsrelation

$$e^{-is}\,(A-k) = (B+R_2^*)\,e^{-is}$$

mit einem Restglied-Operator R_2^* vom Typ (4.1).

Beweis:

Sei $u \in C_o^\infty(\Omega^1)$ eine beliebige Testfunktion und

$$\Theta = e^{is}$$

$$w = e^{-is}\,u\ .$$

Wir verwenden die Darstellung (4.2) für den Operator
$A = L_1 + R_1^*$.
Die Leibnitz-Regel liefert sofort

$$\begin{aligned} L_1 u &= L_1(\Theta\, w) \qquad (4.8)\\ &= \sum_\alpha\ i^{-|\alpha|}\ a_\alpha\ D^\alpha(\Theta\cdot w)\\ &= \sum_{\alpha,\gamma}\ i^{-|\alpha|}\ a_\alpha\ \binom{\alpha}{\gamma}\ D^{\alpha-\gamma}\Theta\cdot D^\gamma w\\ &= \Theta\ \sum_\gamma\ c_\gamma(\Theta)\ D^\gamma w \end{aligned}$$

mit Koeffizienten

$$c_\gamma(\Theta) = \frac{1}{\Theta}\ \sum_\alpha\ i^{-|\alpha|}\ a_\alpha \binom{\alpha}{\gamma}\ D^{\alpha-\gamma}\,\Theta\ ,$$

die wir nun berechnen.
Für $|\gamma| = 2m$ gilt nach (4.3)

$$c_\gamma(\Theta) = i^{-|\gamma|}\ a_\gamma = i^{-|\gamma|}\ \frac{1}{\gamma!}\ D_\xi^\gamma P(x,\Theta) \qquad (4.9)$$

und für $|\gamma| \leqq 2m-1$ folgt nach Lemma 4.2. $(\tau = \alpha - \gamma)$, (V II) (2) und (4.1)

$$c_\gamma(\Theta) = i^{-|\gamma|} a_\gamma + \sum_{\alpha > \gamma} i^{-|\alpha|} a_\alpha \binom{\alpha}{\gamma} \left(i^{+|\alpha-\gamma|} \sigma^{\alpha-\gamma} + \right.$$

$$\left. + i^{|\alpha-\gamma|-1} \sum_{|\delta|=2} \binom{\alpha-\gamma}{\delta} \sigma^{\alpha-\gamma-\delta} D_s^\delta + g \right)$$

$$= \sum_\alpha i^{-|\gamma|} a_\alpha \binom{\alpha}{\gamma} \sigma^{\alpha-\gamma} + \sum_{\substack{|\delta|=2 \\ \alpha}} i^{-|\gamma|-1} a_\alpha \binom{\alpha}{\gamma} \binom{\alpha-\gamma}{\delta} \sigma^{\alpha-\gamma-\delta} D^\delta s + r_\gamma^* \quad .$$

Es ist sinnvoll, die Koeffizienten $\{ c_\gamma(\Theta) \}$ durch die Ableitungen des Polynoms $P(x,\xi)$ auszudrücken:
Es gilt für die part. Ableitung D_ξ^τ an der Stelle $\xi = \sigma$

$$D_\xi^\tau P(x,\sigma) = \sum_\alpha a_\alpha \binom{\alpha}{\tau} \tau ! \sigma^{\alpha-\tau}$$

und für die Ableitung D_x^ε dieser Funktion $(\tau = \varepsilon + \gamma)$ mit (V II) (2), (4.1) und Lemma 1.8 $(\delta = \varepsilon + \varepsilon')$

$$\sum_{|\varepsilon|=1} D_x^\varepsilon \left(D_\xi^{\varepsilon+\gamma} P(x,\sigma) \right) =$$

$$= r_\gamma^*(x) + \sum_{\substack{|\varepsilon|=1 \\ |\varepsilon'|=1 \\ \alpha}} a_\alpha \left\{ \binom{\alpha}{\varepsilon+\gamma} (\varepsilon+\gamma) ! \binom{\alpha-\varepsilon-\gamma}{\varepsilon'} \right\} \sigma^{\alpha-\varepsilon-\gamma-\varepsilon'} D_x^\varepsilon \sigma^{\varepsilon'}$$

$$= r_\gamma^*(x) + \sum_{\substack{|\delta|=2 \\ \alpha}} a_\alpha \, 2\gamma ! \binom{\alpha}{\gamma} \binom{\alpha-\gamma}{\delta} \sigma^{\alpha-\gamma-\delta} D^\delta s \quad .$$

Mit diesen beiden Gleichungen ergibt sich dann die Darstellung $(|\gamma| \leqq 2m-1)$

$$c_\gamma(\Theta) = i^{-|\gamma|} \frac{1}{\gamma!} D_\xi^\gamma P(x,\sigma) \tag{4.10}$$

$$+ i^{-|\gamma|-1} \frac{1}{2\gamma!} \sum_{|\varepsilon|=1} D_x^\varepsilon \left(D_\xi^{\varepsilon+\gamma} P(x,\sigma) \right) + r_\gamma^*(x) .$$

Schließlich ist die Gleichung

$$R_1^* u = R_1^* (\Theta w) = \Theta R^* w \tag{4.11}$$

wieder nach (Ψ II) (2), (4.1) leicht einzusehen.
Insgesamt folgt aus (4.8) bis (4.11)

$$e^{-is(A-k)}u = \frac{1}{\Theta}(L_1+R_1^*)u - kw$$

$$= \sum_{1\leqq|\gamma|\leqq 2m} (i^{-|\gamma|}\frac{1}{\gamma!} D_\xi^\gamma P(x,\xi))D^\gamma w + (P(x,\xi)-k)w$$

$$+ \sum_{|\gamma|\leqq 2m-1} (i^{-|\gamma|-1}\frac{1}{2\gamma!} \sum_{|\varepsilon|=1} D_x^\varepsilon (D_\xi^{\varepsilon+\gamma} P(x,\xi)))D^\gamma w + R^* w .$$

Den Beweis des Satz 2 schließt jetzt Lemma 4.1 ab.

§5 A-priori-Abschätzungen für die Strahlungslösungen I

Wir beschäftigen uns nun mit den Abschätzungen für die Strahlungslösungen, die wir wie folgt definieren.

Definition 6.

Sei ($\mathcal{V}$II) (1)a), (2) erfüllt und s die Charakteristikenfunktion gemäß Definition 5. Dann heißt eine auf Ω erklärte Funktion Strahlungslösung, wenn

$$u \in \overset{\circ}{H}{}^{m}_{p}(\Omega) \cap H^{2m}_{p}(\Omega)$$

$$D^{\alpha}(e^{-is}u) \in L^{2}_{q}(\Omega^{1}) \qquad (1 \leqq |\alpha| \leqq m)$$

und

$$(A - k)u = f \quad \text{auf } \Omega$$

gilt.

Bemerkung 4.

(i) An die Funktion u selbst wird also die Forderung $r^{-\frac{1}{2}} u \in L^{2}_{q}(\Omega^{1})$ gestellt.

(ii) Für den Operator $\Delta + k^2$ lautet die Charakteristikenfunktion $s = kr$.
Daher erfüllt unsere Strahlungslösung u auch die klassische Bedingung

$$D_r u - iku \in L^{2}_{q}(\Omega) \quad \text{(bis auf das Gewicht q)}.$$

Die Def. 6 ist also schärfer.

(iii) Die Bedeutung des Gewichtes q ($\neq 1$) liegt darin, daß
$a_{\alpha\beta}(x) - a^{*}_{\alpha\beta} = O(|x|^{-1})$ genügt statt
$a_{\alpha\beta}(x) - a^{*}_{\alpha\beta} = O(|x|^{-1-\varepsilon^{*}})$ $(\varepsilon^{*} > 0)$ im Falle $q \equiv 1$.

In diesem Paragraphen treffen wir die

Voraussetzung 5.1.

Sei (Ψ II) (1)a), (2) erfüllt und $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geqq 0$.
Sei die Funktion

$$u \in \overset{\circ}{H}{}^{m}_{p}(\Omega) \cap H^{2m}_{p}(\Omega)$$

mit

$$D^{\alpha}(e^{-is} u) \in L^{2}_{q}(\Omega^{1}) \quad (1 \leqq |\alpha| \leqq 2m)$$

$$\lambda u \in H^{2m}_{r^{\frac{1}{2}} q}(\Omega)$$

eine Lösung der Gleichung

$$(A - k - i\lambda) u = f$$

und für eine hinreichend groß gewählte Zahl R_o ($\geqq 1$)

$$u(x) = o \text{ für alle } |x| \leqq R_o, \; x \in \Omega \; .$$

Über R_o verfügen wir noch.
Sei stets

$$w = e^{-is} u \; .$$

Wir vereinbaren (vgl. §2):

Für die folgenden Untersuchungen seien c, c_1, c_2 allgemeine von $\{u, R, R_o, \lambda, \delta, \varepsilon\}$ unabh. Konstanten und $J_R(w)$ ein allgemeines Restglied mit

$$|J_R(w)| \leqq c \Big\{ R \Big(\sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq 2m} \|D^{\alpha} w\|^{2}_{o,q,S_R} + \|w\|^{2}_{o,p,S_R} + \lambda \sum_{|\alpha| \leqq 2m} \|r^{\frac{1}{2}} D^{\alpha} w\|^{2}_{o,q,S_R} \Big) + (R_o^{-\frac{1}{2}} + \delta + \varepsilon) \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|D^{\alpha} w\|^{2}_{o,q,\Omega} + R_o^{\frac{1}{2}} \|w\|^{2}_{o,p,\Omega} + \lambda \sum_{|\alpha| \leqq m} \|D^{\alpha} w\|^{2}_{o,q,\Omega} \Big\} ,$$

wobei

$$\|D^\alpha w\|^2_{o,q,S_R} = \int_{S_R} q^2 \, |D^\alpha w|^2 \, do \, .$$

Sei Pw der durch

$$Pw(x) = P(x,\sigma) \, w(x)$$

definierte Multiplikationsoperator.
Wir verwenden ähnliche Überlegungen wie im Paragraphen 2, wobei die Rechnungen aber so zu führen sind, daß der Term

$$O(1) \, \|w\|^2_{o,q,\Omega}$$

nicht auftritt.
Für die Randwerte der Funktion $w \in \overset{\circ}{H}{}^m_*(\Omega) \cap H^{2m}_*(\Omega)$ auf $\dot{\Omega}$ gilt also ((2.1))

$$D^\gamma \, w = \begin{cases} o & |\gamma| < m \\ \nu^\gamma \, D^m_\gamma w & |\gamma| = m \end{cases} \quad \text{auf } \dot{\Omega} \, . \tag{5.1}$$

Differentiation des Gewichtes q^2 liefert stets Terme der Form $\delta \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|D^\alpha w\|^2_{o,q,\Omega}$ vom Typ $J_R(w)$.

Wir verwenden die Schreibweise

$$(D^\alpha w, \, D^\beta w)_R := (D^\alpha w, \, D^\beta w)_{o,q,\Omega_R}$$

$$\|D^\alpha w\|_R := \|D^\alpha w\|_{o,q,\Omega_R}$$

und die Summationskonvention.

Wir beweisen das einfache

Lemma 5.1.

Sei die Vor. 5.1 erfüllt.
Sei $\varphi \in C^m_*(\overline{\Omega})$ eine reelle Funktion mit dem asymptotischen Verhalten für $|x| \longrightarrow \infty$

$$\varphi(x) = O(1)$$
$$D^{\gamma}\varphi(x) = O(|x|^{-\frac{1}{2}}) \quad (1 \leqq |\gamma| \leqq m).$$

Dann gelten für alle $R \geqq R_o$

$$\mathrm{Re}((B + R_2^* - i\lambda)w, \varphi w)_{o,q,\Omega_R} = \tag{5.2}$$

$$= \sum_{1 \leqq |\alpha|, |\beta| \leqq m} (b_{\alpha\beta} D^{\beta} w, \varphi D^{\alpha} w)_{o,q,\Omega_R} +$$

$$+ \mathrm{Re}(B_1 w, \varphi w)_{o,q,\Omega_R} + J_R(w)$$

und

$$\lambda \mathrm{Re}((B + R_2^* - i\lambda)w, r\varkappa w)_{o,q,\Omega_R} = \tag{5.3}$$

$$= \lambda \sum_{1 \leqq |\alpha|, |\beta| \leqq m} (b_{\alpha\beta} D^{\beta} w, r\varkappa D^{\alpha} w)_{o,q,\Omega} +$$

$$+ \lambda \mathrm{Re}(B_1 w, r\varkappa w)_{o,q,\Omega_R} + J_R(w) .$$

Beweis:

(i) Wir gehen von der Darstellung (Lemma 4.1)

$$B = (P - k) + B_1 + B'$$

aus und erhalten

$$\mathrm{Re}((B + R_2^* - i\lambda)w, \varphi w)_R =$$

$$= \mathrm{Re}((P - k)w, \varphi w)_R + \mathrm{Re}(R_2^* w, \varphi w)_R +$$

$$+ \mathrm{Re}(B'w, \varphi w)_R + \mathrm{Re}(B_1 w, \varphi w)_R .$$

Es gilt nun für $1 \leqq |\alpha| \leqq m$

$$D^{\alpha}(q^2 \varphi w) = q^2 \varphi D^{\alpha} w + q^2 \sum_{\beta < \alpha} O(r^{-\frac{1}{2}}) D^{\beta} w .$$

Mit part. Integration folgt dann leicht

$$\mathrm{Re}(B'w, \varphi w)_R = \mathrm{Re}((-1)^{|\alpha|} D^\alpha(b_{\alpha\beta} D^\beta w), q^2 \varphi w)_{0,\Omega_R}$$
$$= (b_{\alpha\beta} D^\beta w, \varphi D^\alpha w)_R + J_R(w).$$

Nach (V II) (2), (4.1) sind die Terme

$$((P-k)w, \varphi w)_R, \quad (R_2^* w, \varphi w)_R$$

von der Form $J_R(w)$, falls man beim zweiten Term noch partiell integriert, so daß insgesamt die Beh. (5.2) folgt.

(ii) Beim Beweis von (5.3) brauchen wir im wesentlichen nur die Terme mit einem Koeffizienten $O(r)$ zu beachten.
Wir erhalten analog zu (i)

$$\lambda \mathrm{Re}((B + R_2^* - i\lambda)w, r\varkappa w)_R =$$
$$= \lambda \mathrm{Re}((P-k)w, r\varkappa w)_R + \lambda \mathrm{Re}(R_2^* w, r\varkappa w)_R +$$
$$+ \lambda \mathrm{Re}(B'w, r\varkappa w)_R + \lambda \mathrm{Re}(B_1 w, r\varkappa w)_R$$
$$= J_R(w) + \lambda \mathrm{Re}(B'w, r\varkappa w)_R + \lambda \mathrm{Re}(B_1 w, r\varkappa w)_R .$$

Verwenden wir $(\varkappa = \varkappa(\hat{x}))$

$$D^\alpha(q^2 r \varkappa w) = q^2 r \varkappa D^\alpha w + q^2 \sum_{\beta<\alpha} O(1) D^\beta w ,$$

so folgt wieder mit part. Integration

$$\lambda \mathrm{Re}(B'w, q^2 r \varkappa w)_{0,\Omega_R} =$$
$$= \lambda \mathrm{Re}(b_{\alpha\beta} D^\beta w, r\varkappa D^\alpha w)_R + J_R(w)$$

und somit die Beh. (5.3).

Lemma 5.2.

Sei die Vor. 5.1 erfüllt. Dann ist für alle $R \geq R_o$

$$\mathrm{Re}(B'w, r D_r w)_{o,q,\Omega_R} =$$

$$= \mathrm{Re} \sum_{1 \leqq |\alpha|, |\beta| \leqq m} (b_{\alpha\beta} D^\beta w, (|\alpha| - \tfrac{n}{2}) D^\alpha w)_{o,q,\Omega_R} -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\dot{\Omega}_R} q^2(x\nu) P_{2m}(x,\nu) |D_\nu^m w|^2 \, do + J_R(w).$$

Beweis:

Der Beweis verläuft wörtlich wie bei Lemma 2.1 , wenn wir $\{u, a_{\alpha\beta}, J_R(u)\}$ durch $\{w, b_{\alpha\beta}, J_R(w)\}$ ersetzen und nach (4.5) auf $\dot{\Omega}$

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \nu^\alpha b_{\alpha\beta}(x) \nu^\beta = P_{2m}(x,\nu) \text{ mit (5.1)}$$

sowie nach der Def. (4.4) von $\{b_{\alpha\beta}\}$, (γ II) (2)a)

$$|r D_r b_{\alpha\beta}(x)| = |O(|x|^{-1})| \leqq c R_o^{-1} \text{ für } |x| \geq R_o$$

beachten.

Wir zeigen das vorbereitende

Lemma 5.3.

Sei die Vor. 5.1 erfüllt und r_{01}^* vom Typ (4.1).
Dann gelten für alle $R \geq R_o$

$$\mathrm{Re}((P - k + \mathrm{Re}\, r_{01}^*)w, r D_r w)_{o,q,\Omega_R} = J_R(w) \tag{5.4}$$

und

$$\mathrm{Re}(B_1 w, r D_r w)_{o,q,\Omega_R} = -\frac{1}{2}(n-1)\,\mathrm{Re}(B_1 w, w)_{o,q,\Omega_R} + \tag{5.5}$$

$$+ \mathrm{Im}((\mathrm{Re}\, r_{02}^*)w, r D_r w)_{o,q,\Omega_R} + J_R(w)$$

mit einem geeigneten Koeffizienten r_{02}^* vom Typ (4.1).

Beweis:

(i) Wir setzen

$$h(x) := P(x,\mathfrak{G}) - k + \mathrm{Re}\, r^*_{01}(x)$$

und erhalten nach ($\mathcal{V}$ II) (2)

$$h = O(r^{-1})$$

$$D_i(x_i q^2 h) = q^2 O(r^{-1})$$

und somit die behauptete Beziehung (5.4):

$$\mathrm{Re}(q^2 h w,\ r D_r w)_{o,\Omega_R} =$$

$$= -\frac{1}{2}(D_i(x_i q^2 h)w, w)_{o,\Omega_R} + J_R(w)$$

$$= J_R(w) \ .$$

(ii) Beim Beweis von (5.5) müssen wir insbesondere darauf achten, die Funktion w mit dem Gewicht p zu versehen. Wir definieren

$$h_i(x) := D_{\xi_i}(P(x,\mathfrak{G}) - P^*(\mathfrak{G})) \quad (i = 1,\ldots,n)$$

und analog folgt nach ($\mathcal{V}$ II) (2)

$$\left.\begin{aligned} h_i &= O(r^{-1}) \\ D_j(x_j q^2 h_i) &= q^2 O(r^{-1}) \\ r D_i(q^2 h_i) &= q^2 (O(r^{-1}) + r\,\mathrm{Re}\, r^*_{03}) \end{aligned}\right\} \qquad (5.6)$$

mit einem Koeffizienten r^*_{03} vom Typ (4.1).

Wenden wir Lemma 4.1 auf $B_1 w$ und $\frac{1}{\chi} D_r w$ an, beachten (5.6) und die asymptotischen Eigenschaften ($\mathcal{V}$ II) (2), so ergibt sich, gegebenenfalls mit part. Integration beim Term $(R^* w, \cdot)_R$,

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{Re}\,(B_1 w,\ r D_r w)_R &= \\
&= \mathrm{Im}\,(h_i D_i w,\ r D_r w)_R + \tfrac{1}{2}(n-1)\ \mathrm{Im}\,(w, \tfrac{1}{x} D_r w)_R + \\
&\quad + \mathrm{Im}\,(R^* w,\ r D_r w)_R \\
&= \mathrm{Im}\,(h_i D_i w,\ r D_r w)_R + \tfrac{1}{2}(n-1)\ \mathrm{Re}\,(w, B_1 w)_R - \\
&\quad - \mathrm{Im}\,(w,\ h_i D_i w + R^* w)_R + \mathrm{Im}\,(R^* w,\ r D_r w)_R \\
&= \tfrac{1}{2}(n-1)\ \mathrm{Re}\,(w, B_1 w)_R + J_R(w) + \\
&\quad + \mathrm{Im}\,(r_{04}^* w,\ r D_r w)_R + \mathrm{Im}\,(h_i D_i w,\ r D_r w)_R
\end{aligned}
$$

wieder mit einem Koeffizienten r_{04}^* vom Typ (4.1).
Den letzten Summanden berechnen wir aus

$$
\begin{aligned}
(q^2 h_i D_i w,\ x_j D_j w)_{o,\Omega_R} &= \\
&= - (D_j(x_j q^2 h_i) D_i w,\ w)_{o,\Omega_R} - \\
&\quad - (q^2 h_i (D_i(x_j D_j w) - D_i w),\ w)_{o,\Omega_R} + J_R(w) \\
&= - (D_j(x_j q^2 h_i) D_i w,\ w)_{o,\Omega_R} + (q^2 h_i D_i w,\ w)_{o,\Omega_R} + \\
&\quad + (r D_i(q^2 h_i) D_r w,\ w)_{o,\Omega_R} + \\
&\quad + (q^2 x_j D_j w,\ h_i D_i w)_{o,\Omega_R} + J_R(w)
\end{aligned}
$$

und (5.6) durch

$$
\begin{aligned}
2\ \mathrm{Im}\ (h_i D_i w,\ r D_r w)_R &= \\
&= \mathrm{Im}\,\left\{(h_i D_i w,\ r D_r w)_R - (r D_r w,\ h_i D_i w)_R\right\} \\
&= J_R(w) + \mathrm{Im}\,(r D_r w,\ (\mathrm{Re}\ r_{03}^*) w)_R\ .
\end{aligned}
$$

Die Beh. (5.5) folgt nun leicht über (i) ($h := \mathrm{Im}\ r_{04}^*$).

Fassen wir die drei bewiesenen Hilfssätze zusammen, so erhalten wir das wichtige

Lemma 5.4.

Sei die Vor. 5.1 erfüllt. Dann gilt mit einer von $\{u, R_o, \lambda, \delta, \varepsilon\}$ unabh. Konstanten c

$$\mathrm{Re} \sum_{1 \leqq |\alpha|,\, |\beta| \leqq m} (b_{\alpha\beta} D^{\beta} w,\ ((2|\alpha|-1) + 2\lambda r \varkappa) D^{\alpha} w)_{o,q,\Omega} \leqq$$

$$\leqq c \left\{ R_o^{\frac{1}{2}} \|w\|^2_{o,p,\Omega} + (R_o^{-\frac{1}{2}} + \delta + \varepsilon) \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|D^{\alpha} w\|^2_{o,q,\Omega} + \right.$$

$$\left. + \lambda \sum_{|\alpha| \leqq m} \|D^{\alpha} w\|^2_{o,q,\Omega} + R_o^{\frac{1}{2}} \|f\|^2_{o,\varrho,\Omega} \right\} +$$

$$+ \sup_R \int_{\dot{\Omega}_R} q^2 (x \cdot \nu)\, P_{2m}(x,\nu)\, |D^m_{\nu} w|^2 \, do \,.$$

Beweis:

Nach Satz 2 gilt die Gleichung

$$e^{-is} f = e^{-is} (A - k - i\lambda) u$$

$$= (B + R_2^* - i\lambda) w$$

$$= ((P - k - i\lambda) + B' + B_1 + R_2^*) w.$$

Aus Lemma 5.2, 5.3 folgt daher leicht mit geeignet definierten Koeffizienten r_{01}^*, r_{02}^* vom Typ (4.1)

$$\mathrm{Re}((B + R_2^* - i\lambda) w,\ r D_r w)_R = \tag{5.7}$$

$$= \mathrm{Re}((P - k + \mathrm{Re}\, r_{01}^*) w,\ r D_r w)_R - \lambda\, \mathrm{Im}\,(w,\ r D_r w)_R +$$

$$+ \mathrm{Re}(B' w,\ r D_r w)_R + \mathrm{Re}(B_1 w,\ r D_r w)_R +$$

$$+ \mathrm{Im}((\mathrm{Re}\, r_{02}^*) w,\ r D_r w)_R + \mathrm{Re} \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq 2m-1} (r_{\alpha}^* D^{\alpha} w,\ r D_r w)_R$$

$$= \mathrm{Re}\ (b_{\alpha\beta} D^{\beta} w,\ (|\alpha| - \tfrac{1}{2}) D^{\alpha} w)_R -$$

$$- \tfrac{1}{2}(n-1)\ \left\{ (b_{\alpha\beta} D^{\beta} w,\ D^{\alpha} w)_R + \mathrm{Re}(B_1 w, w)_R \right\} -$$

$$- \tfrac{1}{2} \int_{\dot{\Omega}_R} q^2(x\cdot\nu) P_{2m}(x,\nu) |D_\nu^m w|^2 \, do + J_R(w) +$$

$$+ \mathrm{Im}((\mathrm{Re}\ r_{02}^*) w,\ r D_r w)_R - \lambda\, \mathrm{Im}(w,\ r D_r w)_R \ .$$

Wir schätzen nun den vorletzten Term ab:
Wenn (⅂II) (2)b) mit

$$r_{02}^*(x) = O(|x|^{-\frac{3}{2}})$$

zutrifft, folgt sofort

$$\mathrm{Im}((\mathrm{Re}\ r_{02}^*) w,\ r D_r w)_R = J_R(w) \ .$$

Andernfalls wenden wir Lemma 5.1, (5.2) an auf

$$\varphi := r \varkappa \mathrm{Re}\ r_{02}^* = \varepsilon\, O(1)$$

(hier genau geht die stärkere Regularitätsbedingung ein)

und erhalten über die B_1-Darstellung aus Lemma 4.1

$$\mathrm{Im}((\mathrm{Re}\ r_{02}^*) w,\ r D_r w)_R = \mathrm{Im}(w, \varphi\, \tfrac{1}{\varkappa} D_r w)_R = \tag{5.8}$$

$$= \mathrm{Re}(w,\ \varphi\ B_1 w)_R + J_R(w)$$

$$= \mathrm{Re}((B + R_2^* - i\lambda) w,\ \varepsilon\, O(1) w)_R + J_R(w) .$$

Mit einem analogen Schluß liefert (5.3) für den
λ-abhängigen Term

$$- \lambda\, \mathrm{Im}(w,\ r D_r w)_R = \tag{5.9}$$

$$= - \lambda\, \mathrm{Re}(w,\ r \varkappa B_1 w)_R + J_R(w)$$

$$= - \lambda\, \mathrm{Re}((B + R_2^* - i\lambda) w,\ r \varkappa w)_R +$$

$$+ \lambda\, (b_{\alpha\beta} D^{\beta} w,\ r \varkappa D^{\alpha} w)_R + J_R(w) \ .$$

Den geschweiften Klammerausdruck in (5.7) berechnen wir ebenfalls mittels (5.2) ($\varphi := \equiv 1$) und insgesamt ergibt sich dann aus (5.7) bis (5.9) die Beziehung

$$\mathrm{Re}((B+R_2^* - i\lambda)w,\ r D_r w - (\varepsilon\, O(1) - \tfrac{1}{2}(n-1) - \lambda r \chi)w)_R =$$

$$= \mathrm{Re}(b_{\alpha\beta} D^\beta w,\ ((|\alpha| - \tfrac{1}{2}) + \lambda r \chi) D^\alpha w)_R -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\dot\Omega_R} q^2(x\cdot\nu)\, P_{2m}(x,\nu)\, |D_\nu^m w|^2\, do + J_R(w) .$$

Aus der Vor. 5.1 folgern wir die Existenz einer Teilfolge $\{R_j\}$ mit

$$\lim_{R_j \longrightarrow \infty} R_j \Big(\sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq 2m} \|D^\alpha w\|^2_{o,q,S_{R_j}} + \|w\|^2_{o,p,S_{R_j}} +$$

$$+ \lambda \sum_{|\alpha| \leqq 2m} \|r^{\frac{1}{2}} D^\alpha w\|^2_{o,q,S_{R_j}} \Big) = o .$$

Der Grenzübergang $R_j \longrightarrow \infty$ liefert jetzt die Beh. des Lemma 5.4, wenn wir noch $(B+R_2^* - i\lambda)w = e^{-is} f$ und die Gestalt von $J_R(w)$ beachten.

Wie Lemma 5.4 nahelegt, besteht unsere nächste Aufgabe in der Herleitung von A-priori-Abschätzungen für den Term

$$\|w\|^2_{o,p,\Omega} .$$

Wir benutzen wieder ein allgemeines Restglied $J_{S_R}(w)$ von der Form

$$J_{S_R}(w) = \sum_{\substack{1 \leqq |\alpha|, |\beta| \leqq m \\ |\varepsilon| = 1, \gamma}} ((-1)^{|\alpha-\gamma|} D^{\alpha-\gamma-\varepsilon} (b_{\alpha\beta} D^\beta w),\ \hat{x}^\varepsilon D^\gamma w)_{o,S_R} +$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha| \geqq m+1 \\ \gamma, |\varepsilon|=1}} ((-1)^{|\gamma|} D^{\alpha-\gamma-\varepsilon} w,\ \hat{x}^\varepsilon D^\gamma (r_\alpha^* w))_{o,S_R} .$$

Wir zeigen das

Lemma 5.5.

Es gelte die Vor. 5.1. Dann ist für alle $R \geqq R_o$

$$\lambda \|w\|^2_{o,\Omega_R} + \|w\|^2_{o,S_R} \leqq c \left\{ (\varepsilon + R_o^{-\frac{1}{2}}) \|r^{-\frac{1}{2}} w\|^2_{o,\Omega_R} + \right. \tag{5.10}$$

$$\left. + \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|D^\alpha w\|^2_{o,q,\Omega} + R_o^{\frac{1}{2}} \|r^{\frac{1}{2}} f\|^2_{o,\Omega} + J_{S_R}(w) \right\}$$

mit einer von $\{u, R, R_o, \lambda, \delta, \varepsilon\}$ unabh. Konstanten c.

Beweis:

Es gilt wieder nach Satz 2 ohne Gewicht q

$$\mathrm{Im}((B + R_2^* - i\lambda)w, w)_{o,\Omega_R} = \tag{5.11}$$

$$= \lambda \|w\|^2_{o,\Omega_R} + \mathrm{Im}(B' w, w)_{o,\Omega_R} +$$

$$+ \mathrm{Im}(B_1 w, w)_{o,\Omega_R} + \mathrm{Im}(R_2^* w, w)_{o,\Omega_R} .$$

Die Symmetrie von B' liefert sofort

$$\mathrm{Im}(B' w, w)_{o,\Omega_R} = J_{S_R}(w) .$$

Weiter folgt nach (4.1) und $r^{-\frac{1}{2}} \leqq 2q$ $(r \geqq R_o)$ mit part. Integration

$$- \mathrm{Im}(R_2^* w, w)_{o,\Omega_R} \leqq J_{S_R}(w) + c \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|D^\alpha w\|^2_{o,q,\Omega} +$$

$$+ (\varepsilon + R_o^{-\frac{1}{2}})\, c\, \|r^{-\frac{1}{2}} w\|^2_{o,\Omega_R} .$$

Beachten wir wegen (4.4), (⅋ II) (2)a) und (3.7)

$$\hat{x}^{\varepsilon}\, b_{\varepsilon o} = \tfrac{1}{2} i \;\; \hat{x}^{\varepsilon}\; D_{\xi}^{\varepsilon}\, P(x,\sigma)$$

$$= \tfrac{1}{2} i \,(\hat{x}^{\varepsilon}\; D_{\xi}^{\varepsilon}\, P^{*}(\sigma) + \mathrm{Re}\; O(r^{-1}))$$

$$= \tfrac{1}{2} i \,(\;\; \frac{1}{\mathcal{R}} \;\; + \mathrm{Re}\; O(r^{-1}))$$

und die Symmetrie von B_1, so erhalten wir für den dritten Term von (5.11)

$$\mathrm{Im}(B_1 w, w)_{o, \Omega_R} = - \mathrm{Im}(\hat{x}^{\varepsilon}\; b_{\varepsilon o}\; w, w)_{o, S_R}$$

$$= \tfrac{1}{2} \mathrm{Re}\,((\frac{1}{\mathcal{R}} + \mathrm{Re}\; O(r^{-1}))\, w, w)_{o, S_R}$$

$$\geqq \; c_1 \;\; \|w\|^2_{o, S_R}$$

für alle $R \geqq R_o$, R_o genügend groß gewählt.
Die gewünschte Abschätzung folgt jetzt einfach.

Wir beweisen

Lemma 5.6.

Sei die Vor. 5.1 erfüllt. Dann existieren zu geg. $o < \delta \leqq \frac{1}{2}$ Zahlen $R_o'(\delta)$, $\varepsilon_2(\delta)$, so daß zu jedem $R_o \geqq R_o'(\delta)$ ein $R_1(\delta, R_o) > R_o$ existiert mit (R_o, R_1 unabh. von $\{u, \lambda\}$)

$$\lambda \frac{1}{\delta} \;\; \|w\|^2_{o, q, \{x \in \Omega \,:\, |x| > R_1\}} \;\; + \;\; \|w\|^2_{o, p, \Omega} \;\; \leqq$$

$$\leqq c \left\{ R_o^{-\frac{3}{4}} \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|D^{\alpha} w\|^2_{o, q, \Omega} + R_o^{-\frac{3}{4}} \;\; \|w\|^2_{2m, \Omega_{R_1}} + \|r^{\frac{1}{2}} f\|^2_{o, \Omega} \right\}$$

für alle $o \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_2(\delta)$

und einer von $\{u, R_o, \lambda, \delta, \varepsilon\}$ unabh. Konstanten c.

Beweis:

Wir integrieren (5.10) geeignet und bauen das Gewicht q ein.
Sei $R_2 > R_1 > R_o$ gewählt.
Dann gilt allgemein für eine auf (R_o, ∞) stetige Funktion $\omega = \omega(r)$ die Beziehung

$$\int_{R_1}^{R_2} R^{-1-2\delta} \left(\int_{R_o}^{R} \omega(r)\,dr \right) dR =$$

$$= \frac{1}{2\delta} \int_{R_1}^{R_2} R^{-2\delta}\, \omega(R)\, dR - \frac{1}{2\delta} R_2^{-2\delta} \int_{R_o}^{R_2} \omega(r)\,dr + \frac{1}{2\delta} R_1^{-2\delta} \int_{R_o}^{R_1} \omega(r)\,dr$$

Wenden wir diese Gleichung auf die, insbesondere wegen $u = o$ auf $\dot{\Omega}$, stetigen Funktionen

$$\omega_1(r) = \lambda \, \|w\|^2_{o, S_r}$$

und

$$\omega_2(r) = (\varepsilon + R_o^{-\frac{1}{2}}) \, \|r^{-\frac{1}{2}} w\|^2_{o, S_r}$$

an, so folgt, wenn wir (5.10) mit $R^{-1-2\delta}$ multiplizieren und über (R_1, R_2) integrieren,

$$\|q\, r^{-\frac{1}{2}} w\|^2_{o, \Omega_{R_1, R_2}} + \lambda \frac{1}{2\delta} \, \|q\, w\|^2_{o, \Omega_{R_1, R_2}} \leqq \tag{5.12}$$

$$\leqq \int_{R_1}^{R_2} (R^{-1-2\delta} \, \|w\|^2_{o, S_R} + \lambda R^{-1-2\delta} \, \|w\|^2_{o, \Omega_R}) \, dR +$$

$$+ \lambda \frac{1}{2\delta} R_2^{-2\delta} \, \|w\|^2_{o, \Omega_{R_2}}$$

$$\leqq c \left\{ \int_{R_1}^{R_2} R^{-1-2\delta} \left(\int_{R_o}^{R} \omega_2(r)\,dr \right) dR + \lambda \frac{1}{\delta} R_2^{-2\delta} \, \|w\|^2_{o, \Omega_{R_2}} + \right.$$

$$\left. + \int_{R_1}^{R_2} R^{-1-2\delta} \left(J_{S_R}(w) + \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|D^\alpha w\|^2_{o, q, \Omega} + R_o^{\frac{1}{2}} \, \|r^{\frac{1}{2}} f\|^2_{o, \Omega} \right) dR \right\}$$

$$\leqq c \left\{ \frac{1}{\delta} (\varepsilon + R_o^{-\frac{1}{2}}) \|qr^{-\frac{1}{2}} w\|^2_{o,\Omega_{R_1,R_2}} + \frac{1}{\delta} R_1^{-2\delta} \|w\|^2_{o,\Omega_{R_1}} + \right.$$

$$+ \lambda \frac{1}{\delta} R_2^{-2\delta} \|w\|^2_{o,\Omega_{R_2}} + \int_{R_1}^{R_2} R^{-1-2\delta} J_{S_R}(w)\, dR +$$

$$\left. + \frac{1}{\delta} R_1^{-2\delta} \left(\sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|D^\alpha w\|^2_{o,q,\Omega} + R_o^{\frac{1}{2}} \|r^{\frac{1}{2}} f\|^2_{o,\Omega} \right) \right\} .$$

Mit part. Integration erhalten wir leicht

$$\int_{R_1}^{R_2} R^{-1-2\delta} J_{S_R}(w)\, dR \leqq \tag{5.13}$$

$$\leqq c \left\{ R_1^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|D^\alpha w\|^2_{o,q,\Omega} + \|qr^{-\frac{1}{2}} w\|^2_{o,\Omega_{R_1,R_2}} \right) + \right.$$

$$\left. + R_1^{-\frac{3}{4}} \sum_{|\alpha| \leqq 2m-1} \|D^\alpha w\|^2_{o,S_{R_1}} + \sum_{|\alpha| \leqq 2m-1} \|D^\alpha w\|^2_{o,q,S_{R_2}} \right\}$$

und weiter über Lemma 1.2

$$\sum_{|\alpha| \leqq 2m-1} \|D^\alpha w\|^2_{o,S_{R_1}} \leqq c \|w\|^2_{2m,\Omega_{2R_1}} . \tag{5.14}$$

Insgesamt folgt schließlich aus (5.12) bis (5.14) die Ungleichung

$$(1 - \frac{1}{\delta}(\varepsilon + R_o^{-\frac{1}{2}})\, c_2) \|qr^{-\frac{1}{2}} w\|^2_{o,\Omega_{R_1,R_2}} + \lambda \frac{1}{2\delta} \|qw\|^2_{o,\Omega_{R_1,R_2}} \leqq \tag{5.15}$$

$$\leqq c \left\{ (\frac{1}{\delta} R_1^{-2\delta} + R_1^{-\frac{1}{2}}) \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|D^\alpha w\|^2_{o,q,\Omega} + \frac{1}{\delta} R_1^{-2\delta} R_o^{\frac{1}{2}} \|r^{\frac{1}{2}} f\|^2_{o,\Omega} + \right.$$

$$+ (\frac{1}{\delta} R_1^{-2\delta} + R_1^{-\frac{3}{4}}) \|w\|^2_{2m,\Omega_{2R_1}} +$$

$$\left. + \lambda \frac{1}{\delta} R_2^{-2\delta} \|w\|^2_{o,\Omega_{R_2}} + \sum_{|\alpha| \leqq 2m-1} \|D^\alpha w\|^2_{o,q,S_{R_2}} \right\} .$$

Wir wählen nun zu geg. $o < \delta \leqq \frac{1}{2}$ die Parameter $\varepsilon_2(\delta)$, $R_o'(\delta)$ so, daß

$$1 - \frac{1}{\delta}\,(\varepsilon + R_o^{-\frac{1}{2}})\,c_2 \geqq \frac{1}{2}$$

für alle $\varepsilon \leqq \varepsilon_2(\delta)$, $R_o \geqq R_o'(\delta)$ gilt, und zu geg. $R_o \geqq R_o'(\delta)$ den Parameter $R_1(\delta, R_o)$ so, daß

$$R_1^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\delta}\,R_1^{-2\delta} \leqq R_o^{-\frac{3}{4}}$$

erfüllt ist (hier genau ist $\delta > o$ erforderlich).
Damit folgt die behauptete Abschätzung unmittelbar aus (5.15), wenn wir den Grenzübergang $R_2 \longrightarrow \infty$ für eine geeignete Teilfolge durchführen und nach Vor. 5.1

$$\lim_{R_2 \longrightarrow \infty} \sum_{|\alpha| \leqq 2m-1} \|D^\alpha w\|^2_{o,q,S_{R_2}} = o$$

$$\lambda \lim_{R_2 \longrightarrow \infty} R_2^{-2\delta}\,\|w\|^2_{o,\Omega_{R_2}} = o$$

beachten.

Bemerkung 5.

Mit entsprechenden Überlegungen wie beim Beweis des Lemma 5.6 erhalten wir auch Abschätzungen für den Term

$$\|w\|^2_{o,q,S_R}\,, \quad R \geqq R_1\,,$$

wenn wir in Lemma 5.5, (5.10) mit dem Gewicht q arbeiten und

$$J_{S_R}(w) = -\int_R^\infty D_r \left\{ J_{S_r}(w) \right\} dr$$

beachten.

§6 A-priori-Abschätzungen für die Strahlungslösungen II

Wir beweisen nun die A-priori-Abschätzungen in der Form, die wir zur Anwendung der Methode der Grenzabsorption benötigen.
Wir zeigen

Lemma 6.1.

Sei ($\mathcal{V}$II) (1) erfüllt.
Es gilt die Darstellung

$$\Phi(\sigma,\xi) = \sum_{\substack{1\leq|\alpha|,\,|\beta|\leq m \\ ||\alpha|-|\beta||\leq 1}} 2^{-||\alpha|-|\beta||}\, D_\eta^{\alpha+\beta} P^*(\sigma)\, \xi^{\alpha+\beta}\, \frac{1}{|\alpha+\beta|!}\, \frac{|\alpha|!}{\alpha!}\, \frac{|\beta|!}{\beta!}$$

und

$$|\xi|\, D_{|\xi|}\, \Phi(\sigma,\xi) - \Phi(\sigma,\xi) = \sum_{\substack{1\leq|\alpha|,\,|\beta|\leq m \\ ||\alpha|-|\beta||\leq 1}} 2^{-||\alpha|-|\beta||}\, (2|\alpha|-1)\, D_\eta^{\alpha+\beta} P^*(\sigma)\, \xi^{\alpha+\beta}\, \frac{1}{|\alpha+\beta|!}\, \frac{|\alpha|!}{\alpha!}\, \frac{|\beta|!}{\beta!}$$

Beweis:

Die erste Gleichung folgt leicht mit Lemma 1.8 und (3.4):

$$\sum_{\substack{1\leq|\alpha|,\,|\beta|\leq m \\ ||\alpha|-|\beta||\leq 1}} 2^{-||\alpha|-|\beta||}\, D_\eta^{\alpha+\beta} P^*(\sigma)\, \xi^{\alpha+\beta}\, \frac{1}{|\alpha+\beta|!}\, \frac{|\alpha|!}{\alpha!}\, \frac{|\beta|!}{\beta!} \tag{6.1}$$

$$= \sum_{\substack{|\alpha|=|\beta|=k \\ k=1,\dots,m}} \frac{1}{(2k)!}\, \frac{k!}{\alpha!}\, \frac{k!}{\beta!}\, D_\eta^{\alpha+\beta} P^*(\sigma)\, \xi^{\alpha+\beta}$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha|=k,\,|\beta|=k+1 \\ k=1,\dots,m-1}} \frac{1}{(2k+1)!}\, \frac{k!}{\alpha!}\, \frac{(k+1)!}{\beta!}\, D_\eta^{\alpha+\beta} P^*(\sigma)\, \xi^{\alpha+\beta}$$

$$= \sum_{|\gamma|\geq 2} \frac{1}{\gamma!}\, D_\eta^{\gamma} P^*(\sigma)\, \xi^{\gamma}$$

$$= \Phi(\sigma,\xi).$$

Differenzieren wir (6.1) nach $|\xi|$, so folgt die zweite Gleichung.

Wir beweisen nun

Lemma 6.2.

Sei die Vor. 5.1 und ($\mathcal{V}$II) (1) b) erfüllt.
Dann gilt die Abschätzung

$$c_1 \Big(\sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|D^\alpha w\|^2_{o,q,\Omega} + \lambda \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|r^{\frac{1}{2}} D^\alpha w\|^2_{o,q,\Omega} \Big) \leqq$$

$$\leqq \operatorname{Re} \sum_{1 \leqq |\alpha|,\, |\beta| \leqq m} \big((2|\alpha|-1) + 2\lambda r \varkappa \big) b_{\alpha\beta} D^\beta w,\, D^\alpha w)_{o,q,\Omega} +$$

$$+ (\delta c + R_o^{-\frac{1}{2}} c_2(\tfrac{1}{\delta})) \Big\{ \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} (\|D^\alpha w\|^2_{o,q,\Omega} + \lambda \|r^{\frac{1}{2}} D^\alpha w\|^2_{o,q,\Omega}) +$$

$$+ \|r^{-\frac{1}{2}} w\|^2_{o,q,\Omega} + \lambda \|w\|^2_{o,q,\Omega} \Big\}$$

mit von $\{u, R_o, \lambda, \delta, \varepsilon\}$ unabh. Konstanten c, c_1 und einer von $\{u, R_o, \lambda, \varepsilon\}$ unabh. Konstanten $c_2(\frac{1}{\delta})$.

Beweis:

Wir orientieren uns am Beweis der Garding'schen Ungleichung und benutzen als Hilfsmittel die Fouriertransformation und eine geeignete Überdeckung des $\mathbb{R}^n$. Es treten hier keine Randwerte der Funktion w auf $\dot{\Omega}$ auf. Zu geg. $o < \delta \leqq \frac{1}{2}$ wählen wir eine offene Überdeckung $\{S_i\}_{i=1}^{m_o}$ von S_1^{n-1} und eine zugehörige Zerlegung der Eins $\{\varphi_i\}_{i=1}^{m_o}$ von S_1^{n-1} ($\sum_i \varphi_i^2 \equiv 1$ auf S_1^{n-1}), so daß für alle $x, x' \in S_i$ $(i = 1, \ldots, m_o)$

$$|\sigma^\alpha(x) - \sigma^\alpha(x')| \leqq \delta \quad (|\alpha| \leqq 2m) \tag{6.2}$$

gilt.

Die Definition

$$U_i = \{x \in \mathbb{R}^n - \{o\} : \hat{x} \in S_i\}$$

$$\psi_i(x) = \varphi_i(\hat{x})$$

liefert dann eine Überdeckung des $\mathbb{R}^n - \{o\}$ mit zugehöriger Zerlegung der Eins, die das von δ abhängige asymptotische Verhalten

$$D^\alpha \psi_i(x) = O(|x|^{-1}) \quad (|\alpha| \geqq 1) \tag{6.3}$$

besitzt.
Wir wählen noch zu jedem $i = 1,\ldots,m_o$ genau ein festes $x_i \in S_i$.
Seien noch c, c_1, c_2 die in der Beh. des zu beweisenden Lemma angegebenen allgemeinen Konstanten und entsprechend $J(w)$ das Restglied.
Weiter benutzen wir die Bezeichnungen

$$a[w] = \mathrm{Re} \sum_{1 \leqq |\alpha|,\ |\beta| \leqq m} ((2|\alpha|-1)\ b^*_{\alpha\beta}\ D^\beta(qw),\ D^\alpha(qw))_{o,\Omega}$$

und

$$b[w] = \sum_{1 \leqq |\alpha|,\ |\beta| \leqq m} 2(b^*_{\alpha\beta}\ D^\beta(q(r\varkappa)^{\frac{1}{2}}w),\ D^\alpha(q(r\varkappa)^{\frac{1}{2}}w))_{o,\Omega}.$$

Entsprechend seien für festgehaltene Koeffizienten $\{b^*_{\alpha\beta}(x_i)\}$ die Formen

$$a_i[w] \text{ und } b_i[w]$$

definiert. Sei noch $\sigma_i := \sigma(x_i)$.
Wir führen den Beweis in 3 Schritten:

(i) Sei i fest gewählt.
Wir zeigen die Behauptung für die Funktionen

$$v_1 = \psi_i\, q\, w$$

bzw.

$$v_2 = \psi_i\, q(r\varkappa)^{\frac{1}{2}} w$$

mit in x_i festgehaltenen Koeffizienten.

Es folgt mit Fouriertransformation, der Definition der $\{b^*_{\alpha\beta}\}$ ((4.4)), Lemma 6.1 und Lemma 3.2

$$a_i[\psi_i w] + \lambda b_i[\psi_i w] =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n_\xi} (|\xi|\, D_{|\xi|}\, \Phi(\sigma_i, \xi) - \Phi(\sigma_i, \xi))\, |\hat{v}_1(\xi)|^2\, d\xi +$$

$$+ 2\lambda \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\sigma_i, \xi)\, |\hat{v}_2(\xi)|^2\, d\xi$$

$$\geqq e_4 \int_{\mathbb{R}^n_\xi} (|\xi|^2 + |\xi|^{2m})\, (|\hat{v}_1(\xi)|^2 + \lambda\, |\hat{v}_2(\xi)|^2)\, d\xi$$

$$\geqq c_1 \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} (\|D^\alpha(\psi_i q w)\|^2_{0,\Omega} + \lambda \|D^\alpha(\psi_i q(r\varkappa)^{\frac{1}{2}} w)\|^2_{0,\Omega}) . \quad (6.4)$$

(ii) Für den allgemeinen Fall variabler Koeffizienten verwenden wir die Zerlegung

$$a[\psi_i w] + \lambda b[\psi_i w] =$$

$$= a_i[\psi_i w] + \lambda b_i[\psi_i w] +$$

$$+ (a[\psi_i w] - a_i[\psi_i w]) + \lambda (b[\psi_i w] - b_i[\psi_i w]) .$$

Für die beiden Differenzen folgt über (6.2), (4.4) die Ungleichung

$$|a[\psi_i w] - a_i[\psi_i w]| + \lambda |b[\psi_i w] - b_i[\psi_i w]| \leqq$$

$$\leqq c\delta \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} (\|D^\alpha(\psi_i q w)\|^2_{0,\Omega} + \lambda \|D^\alpha(\psi_i q(r\varkappa)^{\frac{1}{2}} w)\|^2_{0,\Omega})$$

und insgesamt mit (6.4) die Abschätzung

$$a[\psi_i w] + \lambda b[\psi_i w] \geqq$$

$$\geqq (c_1 - c\delta) \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} (\|D^\alpha(\psi_i q w)\|^2_{0,\Omega} + \lambda \|D^\alpha(\psi_i q(r\varkappa)^{\frac{1}{2}} w)\|^2_{0,\Omega}) . \quad (6.5)$$

(iii) Schließlich erhalten wir wegen $\varkappa(x) = \varkappa(\hat{x})$ ((3.7)) und (6.3) für $1 \leqq |\alpha| \leqq m$ die Beziehung

$$D^{\alpha}(\psi_i\, q\, w) = \psi_i\, q\, D^{\alpha} w + \sum_{|\gamma|<|\alpha|} O(r^{-1})\, q\, D^{\gamma} w \tag{6.6}$$

und

$$D^{\alpha}(\psi_i\, q (r\varkappa)^{\frac{1}{2}} w) = \psi_i\, q\, (r\varkappa)^{\frac{1}{2}} D^{\alpha} w + \sum_{|\gamma|<|\alpha|} O(r^{-1}) q\, r^{\frac{1}{2}} D^{\gamma} w\ .$$

Damit folgt sofort

$$\sum_{i=1}^{m_o} (a[\psi_i w] + \lambda b[\psi_i w]) = \tag{6.7}$$

$$= \mathrm{Re}\,((\,(2|\alpha|-1) + 2\lambda r\varkappa) b^{*}_{\alpha\beta}\, D^{\beta} w,\, D^{\alpha} w)_{o,q,\Omega} + J(w)\,.$$

Beachten wir noch gemäß ($\mathcal{V}$ II) (2) a)

$$b_{\alpha\beta}(x) = b^{*}_{\alpha\beta}(x) + O(|x|^{-1}),$$

so erhalten wir aus (6.5) bis (6.7) leicht die Beh. des Lemma 6.2.

Nun sind wir in der Lage, die gewünschten A-priori-Abschätzungen für die Strahlungslösungen zu formulieren und zu beweisen.

Es gilt

Lemma 6.3.

Sei die Vor. 5.1 (ohne die Bedingung $u(x) = o$ für alle $|x| \leqq R_o$, $x \in \Omega$) und ($\mathcal{V}$ II) (1) b) erfüllt.
Dann gibt es $\lambda_o > o$ und $\delta_2 > o$, so daß zu jedem fest gewählten $o < \delta \leqq \delta_2$ positive Zahlen $\varepsilon_2(\delta)$, $R'_o(\delta)$ und zu $R_o \geqq R'_o(\delta)$, beliebig fest, ein $R_1(\delta, R_o) > R_o$ (R_o, R_1 unabh. von $\{u, \lambda\}$) existieren mit

$$\sum_{1\leq|\alpha|\leq m} \left(\|D^\alpha(e^{-is}u)\|^2_{o,q,\Omega^1} + \lambda \|r^{\frac{1}{2}} D^\alpha(e^{-is}u)\|^2_{o,q,\Omega^1} \right)$$

$$+ R_o^{\frac{1}{2}} \|u\|^2_{o,p,\Omega} + \lambda \|u\|^2_{o,q,\Omega} \leq$$

$$\leq c \left\{ \|f\|^2_{o,\varrho,\Omega} + \|u\|^2_{m,\Omega_{2R_1}} \right\} +$$

$$+ c_3 \sup_R \int_{\{x \in \dot{\Omega}_R : |x| \geq R_o\}} q^2(x\cdot\nu)\, P_{2m}(x,\nu)\, |D^m_\nu u|^2 \, do$$

für alle $o \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2(\delta)$, $o \leq \lambda \leq \lambda_o$ und einer von $\{u, \lambda\}$ unabh. Konstanten c sowie einer von $\{u, R_o, \lambda\}$ unabh. Konstanten c_3.

Beweis:

Sei $\varphi \in C^\infty_o(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit

$$\varphi(x) = \begin{cases} o & |x| \leq R_o \\ 1 & |x| \geq 2R_o \end{cases}$$

und

$$w = e^{-is}\varphi u \ .$$

Die Zahlen $\varepsilon_2(\delta)$, $R'_o(\delta)$ und $R_1(\delta, R_o) \geq 3R_o$ zu geg. $R_o \geq R'_o(\delta)$, $o < \delta \leq \frac{1}{2}$ seien vorerst gemäß Lemma 5.6 gewählt. Lemma 5.4, 5.6 und 6.2 liefern zusammen die Abschätzung für alle $o \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2(\delta)$, $\lambda \geq o$

$$c_1 \left\{ \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} \left(\|D^\alpha w\|^2_{o,q,\Omega} + \lambda \|r^{\frac{1}{2}} D^\alpha w\|^2_{o,q,\Omega} \right) + \right.$$

$$\left. + R_o^{\frac{1}{2}} \|w\|^2_{o,p,\Omega} + \lambda \tfrac{1}{\delta} \|w\|^2_{o,q,\Omega} \right\} \leq$$

$$\leq c \left\{ (\varepsilon + \delta + R_o^{-\frac{1}{4}} + c_2(\tfrac{1}{\delta}) R_o^{-\frac{1}{2}}) \left[\sum_{1\leq|\alpha|\leq m} \left(\|D^\alpha w\|^2_{o,q,\Omega} + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + \lambda \|r^{\frac{1}{2}} D^\alpha w\|^2_{o,q,\Omega} \right) + \|w\|^2_{o,p,\Omega} + \lambda \|w\|^2_{o,q,\Omega} \right] +$$

$$+ R_o^{\frac{1}{2}} \| (A - k - i\lambda)\, \varphi u \|^2_{o,\varrho,\Omega} + \lambda \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \| D^\alpha w \|^2_{o,q,\Omega} +$$

$$+ \| w \|^2_{2m,\Omega_{R_1}} + \lambda \frac{1}{\delta} \| w \|^2_{o,\Omega_{R_1}} \Big\} +$$

$$+ \sup_R \int_{\Omega_R} q^2 (x \cdot \nu)\, P_{2m}(x,\nu)\, |D^m_\nu w|^2 \, do$$

mit von $\{u, R_o, \lambda, \delta, \varepsilon\}$ unabh. Konstanten c, c_1 und einer von $\{u, R_o, \lambda, \varepsilon\}$ unabh. Konstanten $c_2(\frac{1}{\delta})$.
Die Beh. folgt damit leicht, wenn wir λ_o, δ_2, $\varepsilon_2(\delta)$ und $R_o'(\delta)$ geeignet wählen und die bekannte Abschätzung (Lemma 1.5, $R_1 \geqq N_1$)

$$\| u \|_{2m,\Omega_{R_1}} \leqq c \left(\| f \|_{o,\Omega_{2R_1}} + \| u \|_{m,\Omega_{2R_1}} \right)$$

beachten (sowie Lemma 1.2).

Unsere letzte Aufgabe besteht in der Abschätzung des Randintegrals. Wir erhalten

Satz 3.

Sei ($\mathcal{V}$ II) (1) (2), (4) a) erfüllt und die Funktion

$$u \in \overset{o}{H}{}^m_p(\Omega) \cap H^{2m}_p(\Omega)$$

mit

$$D^\alpha (e^{-is} u) \in L^2_q(\Omega^1) \quad (1 \leqq |\alpha| \leqq 2m)$$

$$\lambda u \in H^{2m}_{r^{\frac{1}{2}}q}(\Omega)$$

eine Lösung der Gleichung

$$(A - k - i\lambda)\, u = f .$$

Dann gibt es positive Zahlen λ_o, δ_2 und zu festem $o < \delta \leqq \delta_2$ eine Zahl $\varepsilon_2(\delta)$, so daß für alle $o \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_2(\delta)$, $o \leqq \lambda \leqq \lambda_o$ gilt

$$\sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \left(\| D^{\alpha}(e^{-is} u) \|_{o,q,\Omega^1} + \lambda^{\frac{1}{2}} \| r^{\frac{1}{2}} D^{\alpha}(e^{-is} u) \|_{o,q,\Omega^1} \right) +$$

$$+ \| u \|_{2m,p,\Omega} + \lambda^{\frac{1}{2}} \| u \|_{o,q,\Omega} \leqq$$

$$\leqq c \left(\| f \|_{o,\varrho,\Omega} + \| u \|_{m,\Omega_{R_1}} \right)$$

mit von $\{u, \lambda\}$ unabh., von δ abh., Konstanten c, R_1.

Beweis:

Die Beh. des Satz 3 folgt aus Lemma 6.3, wenn wir die Ungleichung

$$\| u \|_{2m,p,\Omega} \leqq c \left(\| f \|_{o,p,\Omega} + \| u \|_{o,p,\Omega} \right) \tag{6.8}$$

(s. Beweis des Lemma 1.6) benutzen und noch den Randterm abschätzen. Seien c, c_4 von $\{u, R_o, \lambda\}$ unabh. Konstanten. Für ein genügend groß gewähltes R_o erhalten wir über ($\mathcal{V}$II) (4) a), Lemma 1.2, (6.8) und

$$D_{\nu}^{m}(p\,u) = p\, D_{\nu}^{m} u \quad \text{auf } \dot{\Omega}$$

die Ungleichung

$$c_3 \sup_{R} \int_{\{x \in \dot{\Omega}_R :\, |x| \geqq R_o\}} q^2 (x \cdot \nu)\, P_{2m}(x, \nu)\, |D_{\nu}^{m} u|^2 \, do \leqq$$

$$\leqq \gamma_o\, c\, \| D_{\nu}^{m}(p\,u) \|_{o,\dot{\Omega}}^2 \leqq c\, \| u \|_{m+1,p,\Omega}^2$$

$$\leqq c\, \| f \|_{o,p,\Omega}^2 + c_4 \| u \|_{o,p,\Omega}^2 \,.$$

Wählen wir noch R_o mit

$$c_4 \leqq \frac{1}{2} R_o^{\frac{1}{2}} \,,$$

so folgt schließlich die gewünschte Abschätzung.

Bemerkung 6.

Der kompakte Anteil $\|u\|_{m,\Omega_{R_1}}$ in der Abschätzung des Satz 3 entfällt, falls

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > R_1\} \tag{6.9}$$

gilt für die in Lemma 6.3 bzw. Satz 3 angegebene Konstante R_1, die von δ, γ_o, den Koeffizienten des Differentialoperators A und der gleichmäßigen Überdeckung von $\overline{\Omega}$ (Def. 2) abhängt.
Die Bedingung (6.9) läßt sich für eine Klasse von "Glockengebieten" durch Verschieben erzielen.
Es wäre interessant, die erwähnte Abschätzung ohne den Term $\|u\|_{m,\Omega_{R_1}}$ allgemein zu beweisen.

Wir geben noch eine A-priori-Abschätzung unter der Voraussetzung der r-Gleichmäßigkeit von $\overline{\Omega}$ an (Def. 3).

Lemma 6.4.

Sei ($\mathcal{V}$ II) (1)a, (2) erfüllt und $\overline{\Omega}$ r-gleichmäßig von der Klasse C^{2m}. Sei $u \in \mathring{H}^m_p(\Omega) \cap H^{2m}_p(\Omega)$ mit

$$D^\alpha(e^{-is} u) \in L^2_q(\Omega^1) \quad (1 \leqq |\alpha| \leqq m), \quad (B+R_2^*)\, e^{-is} u \in L^2_q(\Omega^1).$$

Dann gilt

$$D^\alpha(e^{-is} u) \in L^2_q(\Omega^1) \quad (m < |\alpha| \leqq 2m)$$

und mit einer von u unabh. Konstanten c

$$\sum_{m<|\alpha|\leqq 2m} \|D^\alpha(e^{-is} u)\|_{o,q,\Omega^1} \leqq$$

$$\leqq c\,(\|(B+R_2^*)\, e^{-is} u\|_{o,q,\Omega^1} + \sum_{1\leqq|\alpha|\leqq m} \|D^\alpha(e^{-is} u)\|_{o,q,\Omega^1} + \|u\|_{2m,p,\Omega}).$$

Beweis: (Skizze)

Man verwende für $q \equiv 1$ die bei (Agmon [1] sec. 6, sec. 9, insbes. Lemma 9.2 , 9.3) angegebenen Methoden und die in Lemma 1.7 konstruierte r-gleichmäßige Zerlegung der Eins. Die Bedingung (1.6) garantiert (unter anderem), daß die Funktion $e^{-is}u$ selbst stets mit dem Gewicht $p = q\, O(r^{-\frac{1}{2}})$ auftritt (vgl. auch Beweis des Lemma 6.2). Die Abschätzung für $q \not\equiv 1$ folgt dann leicht, wenn man die entsprechende Abschätzung mit dem Gewicht 1 auf $q\, e^{-is}u$ anwendet.
Analog zu Satz 3 zeigen wir

Satz 4.

Sei die Vor. des Satz 3 und ($\forall$ II) (4) b) (statt a)) erfüllt. Dann existiert eine Zahl μ_2, so daß für alle $o \leqq \mu \leqq \mu_2$ die Aussage des Satz 3 gilt.

Beweis:

Wir schließen wie beim Beweis des Satz 3 und erhalten über ($\forall$ II) (4) b), Lemma 6.4 mit einer von $\{u, \lambda, \mu\}$ unabh., vom "Atlas" auf $\overline{\Omega}$ (s. Def. 3) abh. Konstanten $c_5 = c_5(\overline{\Omega})$ die Abschätzung

$$c_3 \sup_R \int_{\{x \in \dot{\Omega}_R : |x| > R_o\}} q^2(x,\nu)\, P_{2m}(x,\nu)\, |D_\nu^m (e^{-is}u)|^2 \, do \leqq$$

$$\leqq \mu c \sum_{m \leqq |\alpha| \leqq m+1} \| D^\alpha (q\, e^{-is}u) \|^2_{o, \Omega_1}$$

$$\leqq \mu c \left(\sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m+1} \| D^\alpha (e^{-is}u) \|^2_{o,q,\Omega_1} + \|u\|^2_{o,p,\Omega} \right)$$

$$\leqq \mu c \, \|f\|^2_{o,q,\Omega} + \mu c_5 \left(\sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \| D^\alpha (e^{-is}u) \|^2_{o,q,\Omega_1} + \|u\|^2_{o,p,\Omega} \right)$$

Wählen wir

$$\mu c_5 \leqq \frac{1}{2} \, ,$$

so folgt alles Gewünschte.

§7 Ein Existenzsatz in gewichteten Sobolevräumen mit negativer Norm

Im Paragraphen 2 haben wir allgemeine A-priori-Abschätzungen für Lösungen elliptischer Differentialgleichungen bewiesen. Mit Hilfe dieser Abschätzungen zeigen wir einen Existenzsatz, wobei wir zuvor die Dualräume von gewichteten Sobolevräumen charakterisieren (vgl. Berez.[2], Ch. I §1; $q \equiv 1$).
Sei also $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $m \geq 1$, ganz, q eine stetige, positive Gewichtsfunktion auf $\overline{\Omega}$ und stets

$$H = \overset{\circ}{H}{}^m_q(\Omega) \ , \quad \varrho = \frac{1}{q} \ .$$

Sei noch H' der stetige Dualraum (Hilbertraum) von H und für $u \in H$, $\ell \in H'$

$$\langle \ell, u \rangle := \ell(u) \ .$$

Definition 7.

Für $u \in C_o^\infty(\Omega)$ sei die (negative) Norm

$$\|u\|_{-m,\varrho,\Omega} = \sup_{\substack{v \in \overset{\circ}{H}{}^m_q(\Omega) \\ v \neq o}} \frac{|(u,v)_{o,\Omega}|}{\|v\|_{m,q,\Omega}} \tag{7.1}$$

und durch Abschließung der Hilbertraum

$$H^{-m}_\varrho(\Omega) := \overline{C_o^\infty(\Omega)}^{\| \ \|_{-m,\varrho,\Omega}}$$

definiert.

Durch

$$\langle \iota(u), v \rangle := (u,v)_{o,\Omega}$$

für $u \in C_o^\infty(\Omega)$, $v \in \overset{\circ}{H}{}^m_q(\Omega)$ wird eine stetige Abbildung

$$\iota : \left\{ C_o^\infty(\Omega), \ \| \ \|_{-m,\varrho,\Omega} \right\} \longrightarrow (\overset{\circ}{H}{}^m_q(\Omega))'$$

mit

$$\| \iota(u) \|_{H'} = \|u\|_{-m,\varrho,\Omega} \tag{7.2}$$

erklärt.

Wegen (7.2) erfüllt die Norm $\| \ \|_{-m,\varrho,\Omega}$ die Parallelogrammgleichung, und deshalb ist $H_\varrho^{-m}(\Omega)$ ein Hilbertraum (Yosida [21], S. 39).

Lemma 7.1.

a) Die Abschließung von ι

$$\bar{\iota} : H_\varrho^{-m}(\Omega) \longrightarrow (\mathring{H}_q^m(\Omega))'$$

ist isometrisch und bijektiv, und es gilt für alle $v \in \mathring{H}_q^m(\Omega)$

$$\|v\|_{m,q,\Omega} = \sup_{\substack{u \in C_0^\infty(\Omega) \\ u \neq o}} \frac{|(u,v)_{o,\Omega}|}{\|u\|_{-m,\varrho,\Omega}} , \tag{7.3}$$

sowie für alle $u \in H_\varrho^{-m}(\Omega)$, $v \in \mathring{H}_q^m(\Omega)$

$$|\langle \bar{\iota}(u), v \rangle| \leq \|u\|_{-m,\varrho,\Omega} \ \|v\|_{m,q,\Omega} .$$

b) Sei L ein stetiges, lineares Funktional auf $H_\varrho^{-m}(\Omega)$, $L \in (H_\varrho^{-m}(\Omega))'$. Dann existiert genau ein $v \in \mathring{H}_q^m(\Omega)$ mit

$$\langle L, u \rangle = \overline{\langle \bar{\iota}(u), v \rangle} , \quad \|L\| = \|v\|_{m,q,\Omega}$$

für alle $u \in H_\varrho^{-m}(\Omega)$.

Bemerkung 7.

(i) In der Sprache der Distributionen ist $H_\varrho^{-m}(\Omega)$ die Einbettung des stetigen Dualraumes von $\mathring{H}_q^m(\Omega)$ in die Schwartz'schen Distributionen $\mathcal{D}'(\Omega)$.

(ii) Zum Beispiel gilt

$$L_\varrho^2(\Omega) \subset H_\varrho^{-m}(\Omega)$$

mit

$$\|u\|_{-m,\varrho,\Omega} \leqq \|u\|_{o,\varrho,\Omega}$$

und

$$< \tau(u), v > = (u,v)_{o,\Omega}$$

für $u \in L^2_\varrho(\Omega)$, $v \in \overset{\circ}{H}{}^m_q(\Omega)$.

Beweis des Lemma 7.1:

(i) Nach (7.2) folgt durch Abschließung

$$\|\tau(u)\|_{H'} = \|u\|_{-m,\varrho,\Omega}$$

für alle $u \in H^{-m}_\varrho(\Omega)$.
Deshalb ist nur noch die Surjektivität der Abbildung τ zu zeigen.
Es genügt zu zeigen, daß der Teilraum

$$D' = \iota(C^\infty_o(\Omega)) \subset H'$$

dicht liegt in H'.
Angenommen, D' ist nicht dicht in H'.
Dann existiert ein Funktional $\ell \in H'$ mit

$$\|\ell\|_{H'} = 1 \quad \text{und} \quad (\ell, \iota(u))_{H'} = o$$

für alle $u \in C^\infty_o(\Omega)$.
Diese Eigenschaft übertragen wir mit der durch

$$<\phi(v), w> := (v,w)_H$$

definierten (bekanntlich) isometrischen, bijektiven Abbildung

$$\phi : H \longrightarrow H'$$

auf H selbst.
Es gibt also eind. best. Elemente $v_\ell, v_u \in H$ mit

$$\phi(v_\ell) = \ell, \quad \phi(v_u) = \iota(u)$$

für alle $u \in C^\infty_o(\Omega)$.

Dann erhalten wir

$$\|v_\ell\|_H = \|\phi(v_\ell)\|_{H'} = \|\ell\|_{H'} = 1$$

und über die Definition von $\iota(u)$, $\phi(v_u)$ entsprechend

$$\begin{aligned}(u, v_\ell)_{o,\Omega} &= <\iota(u), v_\ell> = <\phi(v_u), v_\ell> = \\ &= (v_u, v_\ell)_H = (\phi(v_u), \phi(v_\ell))_{H'} \\ &= (\iota(u), \ell)_{H'} = o\end{aligned}$$

für alle $u \in C_o^\infty(\Omega)$.
Es folgt $v_\ell = o$ im Widerspruch zu

$$\|v_\ell\|_H = 1 \ .$$

(7.3) ergibt sich jetzt leicht aus der allgemeinen Formel

$$\|v\|_H = \sup_{\substack{\iota(u) \in D' \\ u \neq o}} \frac{|<\iota(u), v>|}{\|\iota(u)\|_{H'}}$$

mit dem dichten Teilraum $D' \subset H'$.

(ii) Zum Beweis des Teil b) verwenden wir die durch

$$<I(v), v'> = <v', v> \quad (v \in H, \ v' \in H')$$

definierte isometrische, bijektive Abbildung

$$I : H \longrightarrow H''$$

und die zu $\bar{\iota}$ duale, nach a) ebenfalls isometrische, bijektive Abbildung

$$\bar{\iota}' : H'' \longrightarrow (H_\varsigma^{-m}(\Omega))'$$

mit

$$<\bar{\iota}'(v''), u> = \overline{<v'', \bar{\iota}(u)>} \quad (v'' \in H'', \ u \in H_\varsigma^{-m}(\Omega)) \ .$$

Die komponierte Abbildung

$$\bar{\iota}' \circ I : H \longrightarrow (H_\varsigma^{-m}(\Omega))'$$

ist demnach isometrisch und bijektiv und liefert also zu jedem $L \in (H_\varrho^{-m}(\Omega))'$ genau ein $v \in H$ mit

$$\bar{\tau}'(I(v)) = L \,, \quad \|L\| = \|v\|_{m,q,\Omega} \,.$$

Es folgt für alle $u \in H_\varrho^{-m}(\Omega)$ nach Def. von $I, \bar{\tau}$

$$\begin{aligned} \langle L,u\rangle &= \langle \bar{\tau}'(I(v)),u\rangle = \overline{\langle I(v), \bar{\tau}(u)\rangle} \\ &= \overline{\langle \bar{\tau}(u),v\rangle} \,, \end{aligned}$$

und Lemma 7.1 ist somit bewiesen.

Wir diskutieren nun Differentialoperatoren auf gewichteten Sobolevräumen mit negativer Norm.

Lemma 7.2.

Sei $o \leqq k \leqq 2m$, ganz, und

$$A = \sum_{|\alpha| \leqq 2m} a_\alpha D^\alpha$$

mit Koeffizienten $a_\alpha \in L^\infty(\Omega)$, $a_\alpha \in C_*^{|\alpha|-k}(\bar{\Omega})$ $(|\alpha| > k)$. Dann sind die Abbildungen

$$A : H_q^{2m+k}(\Omega) \longrightarrow H_q^k(\Omega)$$

$$A : \{C_o^\infty(\Omega), \|\ \|_{k,\varrho,\Omega}\} \longrightarrow \{L_\varrho^2(\Omega), \|\ \|_{k-2m,\varrho,\Omega}\}$$

und die Abschließung

$$\bar{A} : \overset{\circ}{H}{}_\varrho^k(\Omega) \longrightarrow H_\varrho^{k-2m}(\Omega)$$

stetig.

Beweis:

Geeignete part. Integration liefert die Ungleichung

$$|(Au,v)_{o,\Omega}| \leqq \sum_{|\alpha|\leqq k} |(a_\alpha D^\alpha u, v)_{o,\Omega}|$$

$$+ \sum_{\substack{2m\geqq|\alpha|>k \\ |\beta|=|\alpha|-k}} |(D^{\alpha-\beta}u, (-1)^{|\beta|} D^\beta (a_\alpha v))_{o,\Omega}|$$

$$\leqq c_1 \, \|u\|_{k,\varrho,\Omega} \, \|v\|_{2m-k,q,\Omega}$$

für alle $u \in C_o^\infty(\Omega)$, $v \in H_q^{2m-k}(\Omega)$.
Die Beh. folgt dann aus der für alle $u \in C_o^\infty(\Omega)$ gültigen Beziehung

$$\|Au\|_{k-2m,\varrho,\Omega} = \sup_{\substack{v\in H_q^{2m-k}(\Omega) \\ (v\neq o)}} \frac{|(Au,v)_{o,\Omega}|}{\|v\|_{2m-k,q,\Omega}}$$

$$\leqq c_1 \, \|u\|_{k,\varrho,\Omega} \, .$$

Wir formulieren nun A-priori-Abschätzungen mit negativer, gewichteter Norm.
Es gelte die

Voraussetzung 7.1.

Sei $\overline{\Omega}$ gleichmäßig von der Klasse C^{2m} und

$$\varrho(x) := (1+|x|^2)^{\frac{1-\delta}{2}}, \quad q_1(x) := (1+|x|^2)^{-\frac{\delta}{2}} \quad (o \leqq \delta \leqq \tfrac{1}{2}) \, .$$

Sei

$$A = \sum_{|\alpha|\leqq 2m} a_\alpha D^\alpha, \quad a_\alpha \in C_*^{|\alpha|}(\overline{\Omega})$$

und

$$\mathrm{Re}\,(-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \geqq e_o |\xi|^{2m}$$

für alle $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit einer positiven Konstanten e_o.

Lemma 7.3.

Sei die Vor. 7.1 erfüllt.
Für alle $u \in \mathring{H}_{q_1}^m(\Omega) \cap H_{q_1}^{2m}(\Omega)$ gelte

$$\|u\|_{m,q_1,\Omega} \leqq c_1 \|Au\|_{o,\varrho,\Omega} \cdot \tag{7.4}$$

Dann ist

$$\|\varphi\|_{m,q_1,\Omega} \leqq c_2 \|A\varphi\|_{-m,\varrho,\Omega}$$

für alle $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$.

Beweis:

(i) Wir zeigen die gewünschte Abschätzung zuerst außerhalb des Spektrums von A.
Sei $q := \frac{1}{\varrho}$, $f \in L^2_\varrho(\Omega)$, φ_N die im Beweis des Lemma 1.6 definierte Glättungsfunktion und c eine allgemeine von $\{u,N\}$ unabh. Konstante.
Sei b eine auf $\mathring{H}^m(\Omega) \times \mathring{H}^m(\Omega)$ definierte stetige Bilinearform ((1.1)) mit

$$b[u,v] = (Au,v)_{o,\Omega} ,$$

falls $u \in \mathring{H}^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$ und $v \in \mathring{H}^m(\Omega)$.
Die Garding'sche Ungleichung (Lemma 1.3) liefert die Abschätzung auf $\mathring{H}^m(\Omega)$

$$c_3 \|u\|^2_{m,\Omega} \leqq \text{Re } b[u,u] + k_1 \|u\|^2_{o,\Omega} . \tag{7.5}$$

Deshalb existiert nach dem Satz von Lax-Milgram genau ein $u \in \mathring{H}^m(\Omega)$ mit

$$b[u,\varphi] + k_1 (u,\varphi)_{o,\Omega} = (f,\varphi)_{o,\Omega}$$

für alle $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$.
Aus Lemma 1.5 folgt sogar

$$u \in H^{2m}(\Omega) \quad \text{und} \quad (A + k_1) u = f .$$

Wir erhalten weiter über (7.5)

$$c_3 \|u\|^2_{m,\Omega} \leqq |(f,u)_{o,\Omega}|$$
$$\leqq \|f\|_{-m,\varrho,\Omega} \; \|u\|_{m,q,\Omega}$$

und somit

$$c_3 \|u\|_{m,\Omega} \leqq \|f\|_{-m,\varrho,\Omega} . \tag{7.6}$$

Eine (7.6) entsprechende, verschärfte Abschätzung

$$\|u\|_{m,\varrho,\Omega} \leqq c \|f\|_{-m,\varrho,\Omega} \text{ mit } u \in \overset{\circ}{H}{}^m_{\varrho}(\Omega) \tag{7.7}$$

ergibt sich auch durch die folgende Überlegung:

Es gilt

$$(A+k_1)\, \varphi_N \varrho u = \varphi_N \varrho\, (A+k_1)u + \sum_{|\alpha| \leqq 2m-1} h_\alpha D^\alpha u$$

mit Funktionen

$$h_\alpha \in L^\infty(\Omega) \;,\; h_\alpha \in C_*^{|\alpha|-m}(\overline{\Omega}) \quad (|\alpha| > m) \;.$$

Mit part. Integration und der Ungleichung ($\varrho q = 1$)

$$\|\varphi_N \varrho f\|_{-m,\Omega} = \sup_{\substack{\psi \in C_o^\infty(\Omega) \\ \psi \neq o}} \frac{|(\varphi_N \varrho f, \psi)_{o,\Omega}|}{\|\psi\|_{m,\Omega}}$$
$$\leqq \sup_{\psi \in C_o^\infty(\Omega)} \|f\|_{-m,\varrho,\Omega} \; \frac{\|\varphi_N \varrho \psi\|_{m,q,\Omega}}{\|\psi\|_{m,\Omega}}$$
$$\leqq c \; \|f\|_{-m,\varrho,\Omega}$$

folgt dann aus (7.5) (mit geeign. part. Integr.)

$$c_3 \; \|\varphi_N \varrho u\|^2_{m,\Omega} \leqq |((A+k_1)\varphi_N \varrho u, \varphi_N \varrho u)_{o,\Omega}|$$
$$\leqq |(\varphi_N \varrho f, \varphi_N \varrho u)_{o,\Omega}| + c \|u\|_{m,\Omega} \|\varphi_N \varrho u\|_{m,\Omega}$$
$$\leqq c \; (\|f\|_{-m,\varrho,\Omega} + \|u\|_{m,\Omega}) \; \|\varphi_N \varrho u\|_{m,\Omega} \;.$$

Beachten wir die einfache Ungleichung

$$\|\varphi_N \varrho u\|_{m,\Omega} \geq \|u\|_{m,\varrho,\Omega_N} - c\,\|u\|_{m,\Omega}$$

und (7.6), so liefert schließlich der Grenzübergang $N \longrightarrow \infty$ die gewünschte Abschätzung (7.7).

(ii) Der Beweis des Lemma 7.3 folgt nun einfach:

Sei $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$, fest, und $f := A\varphi$.

Dann existiert nach (i) ein $u \in \mathring{H}^m_\varrho(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$ mit

$$(A + k_1)\, u = f \quad ,$$

das der Ungleichung (7.7) genügt.

Setzen wir

$$v := \varphi - u \in \mathring{H}^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega) \quad ,$$

so folgt

$$Av = k_1 u$$

und gemäß Voraussetzung (7.4)

$$\|v\|_{m,q_1,\Omega} \leq c_1 k_1 \|u\|_{o,\varrho,\Omega} \cdot$$

Für $\varphi = v + u$ selbst erhalten wir damit und (7.7) die gewünschte Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{m,q_1,\Omega} &\leq c_1 k_1 \|u\|_{o,\varrho,\Omega} + \|u\|_{m,q_1,\Omega} \\ &\leq c_2 \|f\|_{-m,\varrho,\Omega} \cdot \end{aligned}$$

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir

Lemma 7.4.

Sei die Vor. 7.1 erfüllt.
Für alle $u \in \mathring{H}^m_{q_1}(\Omega) \cap H^{2m}_{q_1}(\Omega)$ gelte

$$\|u\|_{m,q_1,\Omega} \leq c_1 \|A'u\|_{o,\varrho,\Omega}$$

mit dem adjungierten Operator

$$A' u = \sum_{|\alpha| \leqq 2m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(\bar{a}_{\alpha} u) .$$

Dann existiert zu jedem $f \in L^2_{\varrho}(\Omega)$ ein $u \in \overset{\circ}{H}{}^{m}_{\frac{1}{\varrho}}(\Omega) \cap H^{2m}_{*}(\Omega)$ mit

$$A u = f$$

und

$$\|u\|_{m,\frac{1}{\varrho},\Omega} \leqq c_2 \|f\|_{-m,\varrho,\Omega} .$$

Beweis:

Als wesentliches Hilfsmittel benutzen wir den Satz von Hahn-Banach.
Sei $q = \frac{1}{\varrho}$. Nach Lemma 7.3 gilt für alle $\varphi \in C^{\infty}_{o}(\Omega)$

$$(\|\varphi\|_{m,q,\Omega} \leqq) \ \|\varphi\|_{m,q_1,\Omega} \leqq c_2 \ \|A'\varphi\|_{-m,\varrho,\Omega} . \tag{7.8}$$

Sei D der Teilraum

$$D := \{ A'\varphi : \varphi \in C^{\infty}_{o}(\Omega) \} \subset H^{-m}_{\varrho}(\Omega)$$

und ℓ das (wohldefinierte) lineare Funktional

$$\ell : A'\varphi \in D \longrightarrow (f,\varphi)_{o,\Omega} .$$

ℓ ist ein stetiges Funktional auf D in der $\| \ \|_{-m,\varrho,\Omega}$ Norm, wie nach (7.8) aus der Abschätzung

$$|<\ell, A'\varphi>| = |(f,\varphi)_{o,\Omega}| \leqq \|f\|_{-m,\varrho,\Omega} \ \|\varphi\|_{m,q,\Omega}$$

$$\leqq c_2 \|f\|_{-m,\varrho,\Omega} \ \|A'\varphi\|_{-m,\varrho,\Omega}$$

mit

$$\|\ell\|_{D'} \leqq c_2 \|f\|_{-m,\varrho,\Omega} \tag{7.9}$$

folgt.

Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert also ein stetiges, lineares Funktional $L \in (H^{-m}_{\varrho}(\Omega))'$ mit $L|_D = \ell$ und $\|L\| = \|\ell\|_{D'}$.

Weiter gibt es nach Lemma 7.1 b) ein $u \in \overset{\circ}{H}{}^{m}_{q}(\Omega)$ mit

$$\langle L, v\rangle = \overline{\langle \tau(v), u\rangle} \quad \text{und} \quad \|L\| = \|u\|_{m,q,\Omega}$$

für alle $v \in H^{-m}_{\varrho}(\Omega)$.
Schließlich folgt

$$\langle \ell, A'\varphi\rangle = \langle L, A'\varphi\rangle = \overline{\langle \tau(A'\varphi), u\rangle} = (u, A'\varphi)_{0,\Omega}$$

und damit für alle $\varphi \in C^{\infty}_{0}(\Omega)$

$$(u, A'\varphi)_{0,\Omega} = (f, \varphi)_{0,\Omega}$$

sowie über (7.9)

$$\|u\|_{m,q,\Omega} \leqq c_2 \, \|f\|_{-m,\varrho,\Omega} \quad .$$

Die gesamte Beh. erhalten wir dann über Lemma 1.5 .
Wir sind nun in der Lage, den angekündigten Existenzsatz für nicht notwendig symmetrische Differentialoperatoren A zu formulieren und zu beweisen.

Satz 5.

Sei ($\mathcal{V}$ I) mit den in Satz 1 angegebenen Konstanten für den adjungierten Operator A' erfüllt.

Es gelte für die Koeffizienten $\{r_\alpha\}$: $r_\alpha \in C^{|\alpha|}_{*}(\overline{\Omega})$ und die Funktionen $r\, D^{\gamma} r_\alpha$ ($|\gamma| \leqq |\alpha|$) sind auf Ω beschränkt (durch ε, falls ($\mathcal{V}$ I) (2) b) zutrifft).

Dann existiert zu jedem $f \in L^{2}_{\varrho}(\Omega)$ eine Lösung $u \in \overset{\circ}{H}{}^{m}_{\frac{1}{\varrho}}(\Omega) \cap H^{2m}_{*}(\Omega)$ der Gleichung

$$(A - k)\, u = f$$

mit

$$\|u\|_{m,\frac{1}{\varrho},\Omega} \leqq c \, \|f\|_{-m,\varrho,\Omega}$$

und einer von u unabh. Konstanten c.

Beweis:

Der Beweis folgt sofort aus Satz 1 und Lemma 7.4 , da die Voraussetzungen des Satz 1 auch für den adjungierten Operator $(A' - k)$ erfüllt sind.

Wir bemerken:
Es läßt sich auch zeigen

$$u \in H_{\frac{1}{2}}^{2m}(\Omega) .$$

§8 Existenz und Eindeutigkeit von Strahlungslösungen

Unser Ziel besteht nun darin, die Existenz und Eindeutigkeit von Strahlungslösungen zu beweisen.
Zuvor diskutieren wir die Bedingung (⅋ II) (3):

Falls b) erfüllt ist, folgt nach Definition der Resolventenmenge die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung

$$u \in \mathring{H}^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$$

der Gleichung

$$(A - k - i\lambda_\nu)\, u = f$$

mit der A-priori-Abschätzung

$$\|u\|_{2m,\Omega} \leqq c(\lambda_\nu)\ \|f\|_{0,\Omega} \quad , \tag{8.1}$$

wenn wir Lemma 1.5 beachten.

Wir untersuchen nun das entsprechende Problem, falls a) erfüllt ist.

Es gilt auf $\mathring{H}^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$ die Darstellung

$$\begin{aligned}
(Ru,v)_{0,\Omega} &= \sum_{|\alpha| \leqq 2m-1} (r_\alpha D^\alpha u, v)_{0,\Omega} \\
&= \sum_{|\alpha| \leqq m} (r_\alpha D^\alpha u, v)_{0,\Omega} + \sum_{m < |\alpha| \leqq 2m-1} (r_\alpha D^\alpha u, v)_{0,\Omega} \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|,|\beta| \leqq m \\ |\alpha|+|\beta| \leqq 2m-1}} (d_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^\beta v)_{0,\Omega} \\
&=: b_R[u,v]
\end{aligned}$$

mit geeigneten Koeffizienten

$$d_{\alpha\beta} \in C_*^{|\beta|}(\bar{\Omega}) ,$$

wenn wir maximal (m-1) fach partiell integrieren und die Ableitungen bis zur m-ten Ordnung im linken Argument stehen lassen.
Die Symmetrie von R liefert die Hermitezität der Form $b_R[u,v]$, die jetzt für $u,v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ definiert ist.
Weiter erklären wir auf $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega) \times \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ die stetige Bilinearform

$$b[u,v] := \sum_{|\alpha|,\,|\beta| \leq m} (a_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha v)_{0,\Omega} - ((k+i\lambda)u,v)_{0,\Omega} + b_R[u,v]$$

Es gilt dann für $u \in H^{2m}(\Omega)$, $v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$

$$b[u,v] = ((A-k-i\lambda)u,v)_{0,\Omega}$$

und wir erhalten

Lemma 8.1.

Sei (ν II) mit (3)a) ohne (4) erfüllt, $0 < \lambda \leq 1$.
Dann existiert genau ein

$$u \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$$

mit

$$(A-k-i\lambda)u = f$$

und es ist

$$\lambda \|u\|_{2m,\Omega} \leq c \|f\|_{0,\Omega} \qquad (8.2)$$

mit einer von $\{u,\lambda\}$ unabh. Konstanten c.

Beweis:

Wegen Lemma 1.3 und

$$\lambda \|u\|_{0,\Omega}^2 = \operatorname{Im} b[u,u]$$

ist die Voraussetzung des Satzes von Lax-Milgram

$$c_1 \lambda \|u\|^2_{m,\Omega} \leqq |b[u,u]|$$

mit einer von $\{u,\lambda\}$ unabh., positiven Konstanten c_1 erfüllt.
Also existiert ein eind. best. $u \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ mit

$$b[u,\varphi] = (f,\varphi)_{o,\Omega}$$

für alle $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$, und es gilt

$$c_1 \lambda \|u\|^2_{m,\Omega} \leqq |(f,u)_{o,\Omega}| .$$

Die gesamte Beh. folgt jetzt leicht aus Lemma 1.5 .

Wir benötigen das

Lemma 8.2.

Sei ($\mathcal{V}$ II) ohne (4) erfüllt.
Sei $u \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$ Lösung der Gleichung

$$(A - k - i\lambda)\, u = f$$

mit $\lambda > o$ und $\lambda = \lambda_\nu$, falls (3)b) zutrifft.
Dann gilt

$$u \in H^{2m}_\varrho(\Omega)$$

und

$$\|u\|_{2m,\varrho,\Omega} \leqq c(\lambda)\, \|f\|_{o,\varrho,\Omega}$$

mit einer von u unabh. Konstanten $c(\lambda)$.

Beweis:

Wir benutzen die Bezeichnungen und Überlegungen vom Beweis des Lemma 1.6 und erhalten entsprechend über (8.1) oder (8.2) für die Funktion $\varrho\varphi_N u$ mit einer von $\{u,N\}$ unabh. Konstanten $c(\lambda)$

$$\|\varrho u\|_{2m,\Omega_N} \leqq \|\varrho\varphi_N u\|_{2m,\Omega}$$

$$\leqq c(\lambda)\,\|(A-k-i\lambda)\varrho\varphi_N u\|_{o,\Omega}$$

$$\leqq c(\lambda)\,(\|\varrho f\|_{o,\Omega} + \|u\|_{2m-1,\Omega})$$

$$\leqq c(\lambda)\,\|f\|_{o,\varrho,\Omega}$$

Der Grenzübergang $N \longrightarrow \infty$ liefert das Gewünschte.

Das Problem der Eindeutigkeit von Strahlungslösungen behandeln wir im folgenden (s. Def. 4)

Satz 6.

Sei ($\forall$ II) (1)a), (2), (3)a) erfüllt und

$$k \notin \sigma_p(A,q) .$$

Dann existiert höchstens eine Strahlungslösung u der Gleichung

$$(A-k)u = f .$$

Beweis:

Sei also

$$(A-k)u = \sum_{|\alpha|,\,|\beta| \leqq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u) + Ru - ku = o$$

für eine Strahlungslösung u.
Wir werden zeigen, daß

$$\|u\|_{o,q,\Omega} \leqq c\,(\sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|D^\alpha (e^{-is} u)\|_{o,q,\Omega^1} + \|u\|_{2m,p,\Omega}) \qquad (8.3)$$

mit $c < \infty$ gilt.
Ist (8.3) gezeigt, so folgt

$$u \in L^2_q(\Omega)$$

und über Lemma 1.6 insgesamt

$$u \in \overset{\circ}{H}{}^{m}_{q}(\Omega) \cap H^{2m}_{q}(\Omega_{\cdot}) \ , \ (A-k)\ u = o \ .$$

Die Bedingung $k \notin \mathfrak{S}_p(A,q)$ liefert dann die Eindeutigkeit

$$u = o \ .$$

Wir beweisen jetzt (8.3).
Sei wieder $w = e^{-is}u$ und c eine von u unabh. Konstante.
Sei $J_{S_R}(u)$ ein allgemeines Restglied mit

$$|J_{S_R}(u)| \leqq c \ \|u\|^2_{2m,p,S_R} \ .$$

Verwenden wir (⅋ II) (2), die Hermitezität der Koeffizienten $\{a_{\alpha\beta}\}$ und die Symmetrie des Operators R, so folgt für bel. $R \geqq 1$ mit part. Integration

$$o = ((A-k)u,u)_{o\Omega_R} - (u,(A-k)u)_{o,\Omega_R} =$$

$$= \left\{(Lu,u)_{o,\Omega_R} - (u,Lu)_{o,\Omega_R}\right\} + \left\{(Ru,u)_{o,\Omega_R} - (u,Ru)_{o,\Omega_R}\right\}$$

$$= \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqq m} \Bigg\{ \sum_{k=1}^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|-k+1} (D^{\alpha-\gamma_k(\alpha)}(a_{\alpha\beta}D^{\beta}u), \hat{x}^{\alpha_k} D^{\gamma_k(\alpha)-\alpha_k}u)_{o,S_R}$$

$$- \sum_{k=1}^{|\beta|} (-1)^{|\beta|-k+1} (\hat{x}^{\beta_k} D^{\gamma_k(\beta)-\beta_k}u, D^{\beta-\gamma_k(\beta)}(a_{\beta\alpha}D^{\alpha}u))_{o,S_R} \Bigg\}$$

$$+ \frac{1}{q^2(R)} J_{S_R}(u)$$

$$= \frac{1}{q^2(R)} \Bigg\{ 2i \ \mathrm{Im} \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqq m} \sum_{k=1}^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|+1-k} (D^{\alpha-\gamma_k(\alpha)}(a_{\alpha\beta}D^{\beta}u), \hat{x}^{\alpha_k} D^{\gamma_k(\alpha)-\alpha_k}u)_{o\Omega_R S_R}$$

$$+ J_{S_R}(u) \Bigg\} \ ,$$

wenn wir jedes α (und β) eindeutig zerlegen in

$$\alpha = \sum_{i=1}^{|\alpha|} \alpha_i \ , \quad |\alpha_i| = 1$$

und

$$\gamma_k(\alpha) := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$$

setzen, sowie Terme der Form $O(r^{-\frac{1}{2}})D^\tau u$ in der Norm durch $\frac{1}{q^2(R)} \|u\|^2_{2m,p,S_R}$ abschätzen. Benutzen wir weiter die folgende Darstellung mit $c^\infty(\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq 1\})$-Koeffizienten (s. auch §4)

$$D^\gamma u = \sum_\tau \binom{\gamma}{\tau} D^{\gamma-\tau} e^{is\cdot} D^\tau w$$
$$= e^{is\cdot}\,[i^{|\gamma|}\,\sigma^\gamma w + O(\tfrac{1}{r})w + \sum_{1\leqq|\tau|\leqq|\gamma|} O(1)\, D^\tau w]$$

und (VII) (2), so erhalten wir, wobei im wesentlichen die Terme $O(1)w$ zu beachten sind:

$$0 = \mathrm{Im} \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqq m} \sum_{k=1}^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|+1-k} \cdot \tag{8.4}$$
$$\cdot \,(a^*_{\alpha\beta}\, i^{|\alpha|+|\beta|-k}\, \sigma^{\alpha+\beta-\gamma_k(\alpha)}\, w,\, \hat{x}^{\alpha_k}\, i^{k-1}\, \sigma^{\gamma_k(\alpha)-\alpha_k} w)_{0,q,S_R}$$
$$+ J_{S_R}(u) - \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|\leqq m} \mathrm{Re}\,(h_{\alpha\beta}\, D^\beta w,\, D^\alpha w)_{0,q,S_R}$$
$$1\leqq|\alpha|+|\beta|\leqq 2m$$

mit geeigneten Koeffizienten

$$h_{\alpha\beta} \in C^0_*(\overline{\Omega^1}),\quad h_{\alpha\beta} \in C^{|\beta|-m}_*(\overline{\Omega^1}) \quad (|\beta| > m).$$

Es ergibt sich nun für den ersten Summanden der Gleichung (8.4)

$$\mathrm{Re} \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqq m} \sum_{k=1}^{|\alpha|} \int_{S_R} (q^2\, a^*_{\alpha\beta}\, i^{|\beta|-|\alpha|}\, \sigma^{\alpha+\beta-\alpha_k}\, \hat{x}^{\alpha_k})\,|w|^2\, do_R =$$
$$= \mathrm{Re} \int_{S_R} \Big(\sum_{\substack{|\alpha|,|\beta|\leqq m \\ |\varepsilon|=1}} q^2\, (\overset{\alpha}{\varepsilon})\, a^*_{\alpha\beta}\, i^{|\beta|-|\alpha|}\, \sigma^{\alpha+\beta-\varepsilon}\, \hat{x}^{\varepsilon} \Big)\,|w|^2\, do_R$$

$$= \frac{1}{2} \int_{S_R} q^2 \Big(\sum_{|\varepsilon|=1} D_\xi^\varepsilon \, P^*(\sigma) \, \hat{x}^\varepsilon \Big) \, |w|^2 \, do_R$$

$$= \frac{1}{2} \, \| \varkappa^{-\frac{1}{2}} w \|^2_{o,q,S_R} ,$$

falls wir

$$P^*(\sigma) = \sum_{|\alpha|,\,|\beta| \leqq m} \sigma^\alpha \, a^*_{\alpha\beta} \, i^{|\beta|-|\alpha|} \, \sigma^\beta$$

und (3.7) beachten.
Deshalb folgt

$$\| \varkappa^{-\frac{1}{2}} w \|^2_{o,q,S_R} = \mathrm{Re} \sum_{\substack{1 \leqq |\alpha|+|\beta| \leqq 2m \\ |\alpha| \leqq m}} (h_{\alpha\beta} D^\beta w, D^\alpha w)_{o,q,S_R} + J_{S_R}(u) . \qquad (8.5)$$

Integrieren wir (8.5) über $(1,R_2)$ partiell, so daß auf der rechten Seite in jedem Argument höchstens Ableitungen $D^\gamma w$ mit $|\gamma| \leqq m$ auftreten, dann erhalten wir über (3.8)

$$\| w \|^2_{o,q,\Omega_{1,R_2}} \leqq c \Big\{ \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \big(\| D^\alpha w \|^2_{o,q,\Omega^1} + \| D^\alpha w \|_{o,q,\Omega^1} \| w \|_{o,q,\Omega_{1,R_2}} \big)$$

$$+ \sum_{o \leqq |\alpha| \leqq 2m-1} \big(\| D^\alpha w \|^2_{o,S_1} + \| D^\alpha w \|^2_{o,q,S_{R_2}} \big)$$

$$+ \| u \|^2_{2m,p,\Omega} \Big\} .$$

Die Abschätzung (8.3) folgt einfach durch den Grenzübergang $R_2 \longrightarrow \infty$, wenn wir noch gemäß der Definition der Strahlungslösung

$$\lim_{R \longrightarrow \infty} \| D^\alpha w \|^2_{o,q,S_R} = o \quad (o \leqq |\alpha| \leqq 2m)$$

und Lemma 1.2 berücksichtigen.

Bemerkung 8.

Über die Eindeutigkeit von Strahlungslösungen bei nicht notw. symmetrischen Operatoren R läßt sich folgendes aus-

sagen:
Liegt Ω außerhalb der Kugel K_{R_1} (s. (6.9), Bemerkung 6) und ist ($\forall$ II) erfüllt, so existiert höchstens eine Strahlungslösung u der Gleichung

$$(A - k)\, u = f$$

mit

$$D^\alpha (e^{-is} u) \in L^2_q(\Omega) \quad \text{für } m \leqq |\alpha| \leqq 2m \ .$$

Der Beweis folgt sofort aus Satz 3,4 und Bemerkung 6 mit $\lambda = o$, $f = o$.
Insbesondere gilt dann $k \notin \sigma_p(A,q)$, da (gewichtete) Eigenlösungen auch Strahlungslösungen sind.
Das Existenzproblem löst der

Satz 7.

Sei ($\forall$ II) mit (3)a) erfüllt und $k \notin \sigma_p(A,q)$.
Seien gemäß Satz 3,4 die Konstanten δ_2, μ_2 (falls (4)b) gilt) und zu festem δ mit $o < \delta \leqq \delta_2$ die Konstante $\varepsilon_2(\delta)$ gewählt.
Dann existiert genau eine Strahlungslösung u der Gleichung

$$(A - k)\, u = f \ ,$$

und es gilt

$$\sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \| D^\alpha (e^{-is} u) \|_{o,q,\Omega^1} + \|u\|_{2m,p,\Omega} \leqq$$

$$\leqq c \, \|f\|_{o,\varrho,\Omega}$$

mit einer von u unabh. Konstanten c.

Beweis:

Wir verwenden die Methode der Grenzabsorption:
(i) Sei noch allgemeiner eine Schar $\{f_\lambda\} \subset L^2_\varrho(\Omega)$ $(o < \lambda \leqq 1)$ gegeben, die in $L^2_\varrho(\Omega)$ für $\lambda \to o$ gegen f konvergiert.
Nach Lemma 8.1 , 8.2 existiert zu jedem λ , $o < \lambda \leqq 1$,

genau eine Lösung

$$u_\lambda \in \mathring{H}^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$$

von

$$(A - k - i\lambda)u_\lambda = f_\lambda \tag{8.6}$$

mit $r^{\frac{1}{2}} D^\alpha u_\lambda \in L_q^2(\Omega)$ für alle $o \leqq |\alpha| \leqq 2m$.

Die Voraussetzung des Satz 3,4 ist also erfüllt, und wir erhalten mit von $\{u_\lambda, \lambda\}$ $(o < \lambda \leqq \lambda_o)$ unabh. Konstanten C_1, R_1 die Abschätzung

$$\sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \| D^\alpha (e^{-is} u_\lambda) \|_{o,q,\Omega^1} + \|u_\lambda\|_{2m,p,\Omega} \tag{8.7}$$

$$\leqq C_1 (\|f_\lambda\|_{o,s,\Omega} + \|u_\lambda\|_{m,\Omega_{R_1}}) .$$

(ii) Wir nehmen nun an, daß

$$\|u_\lambda\|_{m,\Omega_{R_1}} \leqq C_2 \tag{8.8}$$

für alle $o < \lambda \leqq \lambda_1$, λ_1 genügend klein, gilt.

Ist (8.8) gezeigt, so folgt mit (8.7) für jedes kompakte $\overline{\Omega}_N$ die bezgl. $\{u_\lambda\}$ gleichmäßige Abschätzung

$$\|u_\lambda\|_{2m,\Omega_N} \leqq C_3(N) .$$

Wenden wir den Rellich'schen Einbettungssatz auf die Funktionenfolge

$$\left\{ u_\lambda |_{\Omega_N} \right\} \quad (N \geqq 1, \text{ ganz}) \quad (o < \lambda \leqq \lambda_o)$$

an, so erhalten wir nach Auswahl einer geeigneten Diagonalfolge eine in $H_*^{2m-1}(\Omega)$ konvergente Teilfolge

$$\{u_{\lambda_j}\} \quad (\lambda_j \longrightarrow o) .$$

(Wir schreiben weiter u_λ statt u_{λ_j}).
Die Konvergenz der Folge $\{u_\lambda\}$ in $H^{2m}_*(\Omega)$ gegen ein $u \in \overset{\circ}{H}{}^m_*(\Omega) \cap H^{2m}_*(\Omega)$ ergibt sich über (8.6):

$$(A-k)\,(u_\lambda - u_{\lambda'}) = i(\lambda\, u_\lambda - \lambda'\, u_{\lambda'}) + f_\lambda - f_{\lambda'}$$

leicht aus Lemma 1.5 $(N' = N + N_1)$:

$$\|u_\lambda - u_{\lambda'}\|_{2m,\,\Omega_N} \leqq$$

$$\leqq c(\|\,(A-k)\,(u_\lambda - u_{\lambda'})\,\|_{o,\,\Omega_{N'}} + \|u_\lambda - u_{\lambda'}\|_{m,\,\Omega_{N'}})$$

$$\leqq c(|\lambda|\;\|u_\lambda\|_{o,\,\Omega_{N'}} + |\lambda'|\;\|u_{\lambda'}\|_{o,\,\Omega_{N'}} + \|f_\lambda - f_{\lambda'}\|_{o,\,\Omega_{N'}}$$

$$+ \|u_\lambda - u_{\lambda'}\|_{m,\,\Omega_{N'}})\,.$$

Insgesamt folgt dann mit (8.6), (8.7)
u ist Strahlungslösung von

$$(A-k)\,u = f$$

und erfüllt die Abschätzung

$$\sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \|D^\alpha (e^{-is}\,u)\|_{o,q,\,\Omega^1} + \|u\|_{2m,p,\Omega} \leqq \tag{8.9}$$

$$\leqq c_1(\|f\|_{o,p,\Omega} + \|u\|_{m,\,\Omega_{R_1}})\,.$$

(iii) Wir beweisen jetzt noch (8.8).
Angenommen, es gibt eine Teilfolge $\{u_{\lambda_j}\}$ mit

$$\|u_{\lambda_j}\|_{m,\,\Omega_{R_1}} \longrightarrow \infty \quad \text{für } \lambda_j \longrightarrow o\,.$$

Sei

$$u'_\lambda = \frac{u_\lambda}{\|u_\lambda\|_{m,\,\Omega_{R_1}}}\,.$$

Es gilt dann

$$(A - k - i\lambda_\cdot)\, u'_\lambda = \frac{1}{\|u_\lambda\|_{m,\Omega_{R_1}}} \cdot f =: f'_\lambda$$

mit

$$f'_{\lambda_j} \longrightarrow o \quad \text{in} \quad L^2_\beta(\Omega) \quad \text{für} \quad \lambda_j \longrightarrow o\,.$$

Wenden wir das in (ii) angegebene Verfahren auf die Folge

$$\left\{ u'_{\lambda_j}\,,\, f'_{\lambda_j} \right\}$$

an, so folgt die Existenz einer in $H^{2m}_*(\Omega)$ gegen eine Strahlungslösung u' von

$$(A - k)\, u' = o$$

konvergenten Teilfolge $\left\{u'_{\lambda'_j}\right\}$.
Satz 6 liefert dann notwendig

$$u' = o$$

im Widerspruch zu

$$\|u'_{\lambda'_j}\|_{m,\Omega_{R_1}} = 1 \quad .$$

(iv) Der kompakte Anteil

$$\|u\|_{m,\Omega_{R_1}}$$

in (8.9) verschwindet mit einer zu (ii) analogen Überlegung:
Angenommen, es gibt eine Folge von Strahlungslösungen $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ der Gleichung

$$(A - k)\, u_j = f_j$$

mit

$$\sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq m} \| D^{\alpha} (e^{-is} u_j) \|_{o,q,\Omega}^{1} + \| u_j \|_{2m,p,\Omega} = 1$$

und

$$\| f_j \|_{o,\varrho,\Omega} \longrightarrow o \quad \text{für } j \longrightarrow \infty .$$

Wenden wir wieder das Verfahren (ii) auf die Folge

$$\{u_j , f_j\}$$

an, so folgt die Existenz einer in $H_{*}^{2m}(\Omega)$ gegen die Nullfunktion konvergenten Teilfolge $\{u_{j'}\}$.
Die wegen der Eindeutigkeit der Strahlungslösungen $\{u_j\}$ gültige Abschätzung (8.9) liefert dann den gesuchten Widerspruch

$$1 \leqq C_1 (\| f_{j'} \|_{o,\varrho,\Omega} + \| u_{j'} \|_{m,\Omega_{R_1}}) \longrightarrow o \quad (j' \longrightarrow \infty) .$$

Bemerkung 9.

(i) Entsprechend der Bemerkung 8 erhalten wir auch bei nicht notw. symmetrischen Operatoren R die Existenz einer Strahlungslösung, falls wieder Ω außerhalb der Kugel K_{R_1} liegt. Man benutze einfach den Beweis des Satz 7, da der Nachweis von (8.8) entfällt.
(ii) Falls ($\forall$ II) (4)b) erfüllt ist, erhalten wir nach Lemma 6.4 die Existenz genau einer (neu definierten) "Strahlungslösung"

$$u \in \overset{\circ}{H}{}_{p}^{m}(\Omega) \cap H_{p}^{2m}(\Omega) ,$$

$$D^{\alpha}(e^{-is} u) \in L_q^2(\Omega) \quad (1 \leqq |\alpha| \leqq 2m) .$$

Die r-Gleichmäßigkeit von $\overline{\Omega}$, die natürlich für glatte Außengebiete erfüllt ist, liefert also zusätzlich

$$D^{\alpha}(e^{-is} u) \in L_q^2(\Omega) \quad (m < |\alpha| \leqq 2m) .$$

Literatur

[1] Agmon, Sh.:
Lectures on elliptic boundary value problems.
Princeton: Van Nostrand 1965.

[2] Berezanski, Ju. M.:
Expansions in Eigenfunctions of selfadjoint operators.
Transl. Math. Mon., Vol. 17: 1968.

[3] Eidus, D.M.:
Some boundary-value problems in infinite regions.
AMS Transl. Ser. 2, 53, 139-166 (1966).

[4] Eidus, D.M.:
The principle of limit amplitude.
Russ. Math. Surv. 24, 3, 97-167 (1969).

[5] Hörmander, L.:
Linear partial differential operators.
Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1964.

[6] Ikebe, T.:
Wave operators for $-\Delta$ in a domain with non-finite boundary.
Publ. RIMS, Kyoto Univ. 4, 413-418 (1968).

[7] Jäger, W.:
Zur Theorie der Schwingungsgleichung mit variablen Koeffizienten in Außengebieten.
Math. Z. 102, 62-88 (1967).

[8] Jäger, W.:
Ein Differentialoperator in einem Hilbertraum.
Math. Z. 113, 68-98 (1970).

[9] Ladyzhenskaya, O.; Ural'tsewa, N.:
Linear and quasilinear elliptic equations.
New York: Academic Press 1968.

[10] Leis, R.:
Außenraumaufgaben zur Plattengleichung.
Arch. Rat. Mech. Anal. 35, 226-233 (1969).

[11] Lions, J.L.; Magenes, E.:
Problèmes aux limites non homogènes et applications,
vol. 1: Dunod Paris 1968.

[12] Maurin, K.:
Methods of Hilbert spaces.
Mon. Math., Tom 45: Warszawa 1967.

[13] Rellich, F.:
Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von
$\Delta u + k^2 u = 0$ in unendlichen Gebieten.
Jber. Deutsch. Math. Ver. 53, 57-65 (1943).

[14] Rhode, H.W.:
Ein Kriterium für das Fehlen von Eigenwerten elliptischer
Differentialoperatoren.
Math. Z. 112, 375-388 (1969).

[15] Saito, Y.:
The principle of limiting absorption for second order
differential equations with operator-valued coefficients.
Publ. RIMS, Kyoto Univ. 7, 581-619 (1971|72).

[16] Saito, Y.:
Spektral and scattering theory for second order differential
operators with operator-valued coefficients.
Osaka J. Math. 9, 463-498 (1972).

[17] Schulenberger, J.R.; Wilcox, C.H.:
A Rellich uniqueness theorem for steady-state wave propagation in inhomogeneous anisotropic media.
Arch. Rat. Mech. Anal. 41, 18-45 (1971).

[18] Vainberg, B.R.:
Principles of radiation, limit absorption and limit amplitude in the general theory of partial differential equations.
Russ. Math. Surv. 21, 3, 115-193 (1966).

[19] Vainberg, B.R.:
On elliptic problems in unbounded domains.
Math. Sbornik 4, 419-444 (1968).

[20] Wienholtz, E.:
Halbbeschränkte partielle Differentialoperatoren zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.
Math. Ann. 135, 50-80 (1958).

[21] Yosida, K.:
Functional Analysis.
Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966.

Lebenslauf

Am 5. August 1942 wurde ich als einziges Kind des Oberzollrates Herbert Vogelsang in Reichstadt im Sudentenland geboren.

Nach der Aussiedlung lebte ich bis 1956 in Mitteldeutschland und anschließend in Bayern. Während dieser Zeit, Herbst 1949 bis Ostern 1957, besuchte ich verschiedene Grundschulen. Über eine Aufbauklasse trat ich im Herbst 1957 in das Deutsche Gymnasium in München ein und legte dort im Juli 1963 die Reifeprüfung ab. Ich begann im Wintersemester 1963|64 mit dem Studium der Mathematik an der Universität München, an der ich im Juni 1966 das Vordiplom erwarb. Im Wintersemester 1966|67 setzte ich das Studium an der Universität Göttingen fort und bestand im Dezember 1969 die Diplom-Mathematiker-Prüfung. Seit dem 1. Mai 1970 bin ich als wissenschaftlicher Assistent am mathematischen Institut der Technischen Universität Clausthal tätig.

Bönecke-Druck 3392-Clausthal-Z. 29